Мы можем сравнить найденное значение амплитуды со значениями амплитуды для предельного случая при $\omega \to 0$ и при резонансе. Из (119) мы находим, что $x_0(\omega=0)=\alpha_0/\omega_0^2=10/10^4$ *см* $=10^{-3}$ *см*. В случае резонанса из (122) получаем

$$x_0(\omega=\omega_0)=Qx_0(\omega=0)=50\cdot 10^{-3}\ см=5\cdot 10^{-2}\ см.$$

Полуширина резонансной кривой *) равна

$$2(\Delta\omega)_{1/2}=\frac{\omega_0}{Q}=\frac{100}{50}\ сек^{-1}=2\ сек^{-1}.$$

Заметим, что в этом примере мы повсюду применяли термин «частота», подразумевая в действительности «угловую частоту». Для того чтобы получить значение обычной частоты, т. е. число колебаний в единицу времени, следует угловую частоту разделить на 2π.

7.8. Принцип суперпозиции

Одно из важнейших свойств гармонического осциллятора состоит в том, что решения являются аддитивными: если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ представляют собой движения под действием вынуждающих сил $F_1(t)$ и $F_2(t)$, то $x_1(t)+x_2(t)$ будет представлять собой движение под действием вынуждающей силы $F_1(t)+F_2(t)$. Это означает, что если мы знаем смещения x_1 и x_2 под действием одних только сил F_1 и F_2 соответственно, то мы можем найти результирующее смещение под действием обеих сил, складывая x_1 и x_2. Это свойство непосредственно следует из уравнения движения

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+\frac{1}{\tau}\frac{d}{dt}+\omega_0^2\right)(x_1+x_2)=$$
$$=\left(\frac{d^2}{dt^2}+\frac{1}{\tau}\frac{d}{dt}+\omega_0^2\right)x_1+\left(\frac{d^2}{dt^2}+\frac{1}{\tau}\frac{d}{dt}+\omega_0^2\right)x_2=F_1+F_2. \quad (133)$$

Законность применения принципа суперпозиции к решению уравнения движения гармонического осциллятора является следствием линейности этого уравнения, содержащего x только в первой степени. Когда уравнение содержит ангармонические члены, картина совершенно меняется. Если в уравнении движения содержится член x^2, то это указывает на наличие двух вынуждающих частот ω_1 и ω_2, приводящих к появлению целого набора гармонических частот ($2\omega_1$, $3\omega_1$, ..., $2\omega_2$, $3\omega_2$, ...) и комбинации «побочных» частот ($\omega_1+\omega_2$, $\omega_1-\omega_2$, $\omega_1-2\omega_2$ и т. д.).

Задачи

1. *Математический маятник.* Маятник состоит из легкой нити длиной $L=100$ *см* и тяжелой массы $M=1\cdot 10^3$ *г*.

а) Чему равен период маятника для малых отклонений?

Ответ. 2,0 *сек*.

---

*) Разность абсцисс, определяемых двумя ординатами, равными $^1/_2$ высоты резонансной кривой. (*Прим. ред.*)

б) Приблизительно до какой величины изменится это значение, если начальное отклонение маятника составит 60°?

Ответ. Новый период=2,1 *сек*.

2. *Масса на пружине.* Масса, равная $1\cdot10^3$ *г*, подвешена на длинной пружине, упругая постоянная которой равна $C=1\cdot10^6$ *дин/см* и коэффициент затухания которой равен $\gamma=50$ *дин·сек/см*. К пружине приложена внешняя сила $F=F_0\sin\omega t$, где $F_0=2{,}5\cdot10^5$ *дин* и ω — частота, вдвое большая собственной частоты системы. Чему равна амплитуда результирующего колебания? На сколько фаза смещения отличается от фазы внешней силы?

Ответ. $8{,}3\cdot10^{-2}$ *см*; $-179{,}9°$.

3. *Масса на пружине (числовые данные).* Приведенные ниже данные получены при наблюдении за колебаниями массы, подвешенной к концу пружины.

Таблица 1

Зависимость периода от массы

Масса, *г*	50	100	150	200	250	300
Период, *сек*	0,72	0,85	0,96	1,06	1,16	1,23

Таблица 2

Зависимость амплитуды колебаний от времени для массы 150 *г*

Время, *сек*	0	30	80	125	180	235	340	455
Амплитуда, *см*	4,5	4,0	3,5	3,0	2,5	2,0	1,5	1,0

а) Построить график зависимости квадрата периода колебаний от массы. В значения массы, приведенные в таблице, не включена масса пружины. Определить эффективную массу пружины, произведя необходимую экстраполяцию графика.

б) Определить постоянную C пружины.

в) Построить график зависимости натурального логарифма амплитуды от времени и определить время релаксации.

г) Определить коэффициент затухания γ.

4. *Масса на пружине. Энергия.* Используя данные табл. 2, приведенной в задаче 3,

а) определить полную среднюю энергию при $t=100$ *сек*.

Ответ. $7{,}3\cdot10^4$ *эрг*.

б) Найти среднюю скорость потери энергии при $t=100$ *сек*.

Ответ. $2{,}4\cdot10^2$ *эрг/сек*.

в) Вычислить потерю энергии за 1 период при $t=100$ *сек*.

Ответ. $2{,}3\cdot10^2$ *эрг*/период.

г) Определить добротность Q колеблющейся системы.

Ответ. 2000.

5. *Масса на пружине. Промежутки времени.* Рассмотрите движение массы $M=5$ *г*, подвешенной к концу вертикальной пружины, упругая постоянная которой равна $C=20$ *дин/см*. Начальное смещение равно 5 *см* выше точки равновесия, а начальная скорость равна 2 *см/сек* и направлена вниз.

а) Показать, что изменение скорости массы в течение первого интервала, следующего за началом колебания, выражается соотношением

$$\Delta v_1 = -\frac{C}{M} x_0 \Delta t.$$

б) Показать, что соответствующее изменение смещения равно

$$\Delta x_1 = v_0 \Delta t.$$

в) Найти положение и скорость в зависимости от времени в течение 4 *сек*, выбрав промежутки времени равными 0,2 *сек* и повторив расчет, указанный в а) и б). Результаты расчета расположить в следующей таблице:

t, *сек*	x, *см*	Δv, *см/сек*	v, *см/сек*	Δx, *см*
0	5,00	—4,00	—2,00	—0,40
0,2	4,60	—3,68	—6,00	—1,20
0,4	3,40	—	—	—
—	—	—	—	—
—	—	—	—	—

Закончите эту таблицу и постройте точный график.

г) Решение может быть записано в виде

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + x_0 \cos \omega t.$$

Для какого-то частного случая решение этой задачи имеет вид

$$x(t) = \sin 2t + 5 \cos 2t.$$

Постройте график этой функции на том же самом чертеже, на котором построен график $x(t)$ в задаче в).

6. *Дифференциальное уравнение математического маятника.* Выведите дифференциальное уравнение для случая математического маятника, пользуясь непосредственно вторым законом динамики $\mathbf{F} = M\mathbf{a}$. При выводе уравнения используйте компоненту силы тяжести, перпендикулярную стержню маятника, когда он отклонен на угол θ.

7. *Скорость тела, движущегося в вязкой среде.* На тело, падающее в вязкой среде, действует сила сопротивления, равная $-\gamma v$. Например, в опыте Милликена с каплей капля массой M, обладающая зарядом q, падает под действием силы тяжести Mg и электрического поля, напряженность которого равна E. Капля быстро достигает конечной скорости $v_к$. Составьте и решите уравнение движения капли, из которого можно получить $v_к$ как функцию времени. (Указание: ищите решение в виде $v = A + Be^{-\alpha t}$ и определите из уравнения значения α, A и B, а также значения v при $t = 0$ и $t = \infty$.) Рассматривая предел при $t \to \infty$, покажите, что конечная скорость равна

$$v_к = \left(\frac{q}{M}\tau\right) E + g\tau,$$

где $\tau = M/\gamma$ = времени релаксации. Измерение значения конечной скорости в зависимости от напряженности электрического поля является удобным способом определения времени релаксации τ и отсюда коэффициента затухания γ. В одном из подобных типичных опытов между двумя параллельными пластинами, находящимися на расстоянии 0,7 *см* друг от друга, поддерживается разность потенциалов 840 *в* [при этом напряженность электрического поля в абсолютных электростатических единицах равна (840/0,7)/300 ед. $СГСЭ_V$/*см*]. Чему будет равно время релаксации τ, если конечная скорость отдельной заряженной капли массой $2 \cdot 10^{-12}$ *г* равна 0,01 *см/сек*? При этом считайте, что сила электрического поля действует в том же самом направлении, что и сила тяжести.

Ответ. $\tau = 5 \cdot 10^{-6}$ *сек*.

8. *Контур, состоящий из соединенных последовательно самоиндукции, емкости и сопротивления.* Поведение контура, состоящего из сопротивления R, конденсатора C и катушки самоиндукции L (рис. 7.23), описывается таким же дифференциальным уравнением, как и поведение пружины, совершающей свободные колебания с затуханием. Уравнение для тока I имеет вид

$$L\frac{d^2 I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = 0.$$

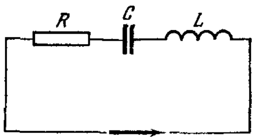

Рис. 7.23.

По аналогии с пружиной найдите выражение для времени релаксации τ и для собственной частоты колебаний ω_0, выразив их через L, R и C.

9. *Колебательный контур LCR с возбуждением.* Пусть контур задачи 8 питается от источника переменного напряжения $V(t) = V_0 \sin \omega t$. В этом случае дифференциальное уравнение будет иметь вид

$$L\frac{d^2 I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \omega V_0 \cos \omega t.$$

Ищите решение в виде $I = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$ и найдите выражение для I_0 и φ, выразив их через X_L, X_C и R, где

$$X_L = \omega L \quad \text{и} \quad X_C = \frac{1}{\omega C}.$$

10. *Гармонический осциллятор, совершающий вынужденные затухающие колебания.* Рассмотрите перечисленные ниже предельные случаи вынужденных затухающих колебаний гармонического осциллятора. Для каждого случая дайте физическое объяснение предполагаемого поведения системы и сравните его с соответствующим предельным случаем полного решения в виде (117) и (129).

а) $M \to 0$, другие величины: F_0, ω, τ и C — имеют конечные значения.

б) $C \to 0$; другие величины имеют конечные значения.

в) $\tau \to \infty$; другие величины имеют конечные значения.

г) $M \to 0$, $C \to 0$; другие величины имеют конечные значения.

д) $M \to 0$, $\tau \to \infty$; другие величины имеют конечные значения.

11. *Измерение гравитационного поля Земли.* Напряженность гравитационного поля Земли можно определить, измеряя период колебаний прецизионного маятника. Этот прибор можно также использовать для определения ускорения тела в вертикальной плоскости. Например, в точке, для которой $g = 980$ *см/сек*^{2}, длину маятника можно подобрать такой, что период будет равен 1 *сек*. Период маятника был измерен в лифте, поднимающемся с постоянным ускорением, и оказался равным 1,025 *сек*.

а) Показать, что период маятника, измеренный в лифте, поднимающемся с постоянным ускорением a, малым по сравнению с g, в пределе будет равен

$$T \cong T_0 \left(1 - \frac{1}{2}\frac{a}{g}\right),$$

где a считается положительным.

б) Чему равно ускорение лифта?

12. *Крутильный подвес.* Крутильный подвес применялся во многих приборах и был также использован в знаменитых опытах Кулона и Кэвендиша. Такой подвес был использован в электрометрах и магнетометрах различных типов, а также в крутильном сейсмометре Вуда — Андерсона. Момент вращения N, приложенный к нити, на которой осуществлен подвес, пропорционален углу поворота φ, так что $N = -K\varphi$. На нити подвешено некоторое тело, момент инерции которого равен

I и, как это будет показано в гл. 8, связан с моментом импульса $\mathbf{J}$ и угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ соотношением $\mathbf{J}=I\boldsymbol{\omega}$.

а) Покажите, что уравнение движения крутильного подвеса для малых углов φ может быть записано в таком же виде, как и для массы на пружине.

б) Решите уравнение движения относительно частоты крутильного маятника.

13. *Выражение для смещения осциллятора в безразмерном виде.* Амплитуда и фаза осциллятора зависят от частоты вынуждающей силы. Уравнения, выражающие эту зависимость, легко записать в безразмерном виде, пригодном для всех осцилляторов, совершающих вынужденные колебания. Покажите, что

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\theta/\theta_0}{\theta^2-1} \quad \text{и} \quad \frac{\omega_0^2 x_0}{\alpha_0}=\frac{1}{\left[(1-\theta^2)^2+\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^2\right]^{1/2}},$$

где

$$\theta=\omega/\omega_0 \quad \text{и} \quad \theta_0=\omega\tau.$$

14. *Добротность Q.* По определению добротность гармонического осциллятора, совершающего вынужденные колебания, равна

$$Q=2\pi\frac{\langle\text{запасенная энергия}\rangle}{\langle\text{энергия, потерянная за один период}\rangle}=\frac{\langle E\rangle\,\omega}{P}.$$

а) Покажите, что для осциллятора, совершающего вынужденные колебания, средняя полная энергия равна

$$\langle E\rangle=\langle K+U\rangle=\langle K\rangle+\langle U\rangle=\frac{1}{4}M\omega^2x_0^2+\frac{1}{4}M\omega_0^2x_0^2.$$

б) Используя выражение, приведенное в а), покажите, что

$$Q=\frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]\omega\tau.$$

15. *Действие силы тяжести на массу, подвешенную к пружине.* Рассмотрим массу M, подвешенную к вертикальной пружине, силовая постоянная которой равна C. Покажите, что сила тяжести, действующая на массу M, не изменяет период колебаний, но изменяет положение равновесия, относительно которого совершается колебание.

16. *Комплексные переменные.* Напишите решение уравнения (81), использовав комплексные переменные. Испробуйте решение в виде $x=x_0e^{i\omega t}$, где ω может представлять собой комплексную величину. Покажите, что

$$\omega=\left[\omega_0^2-\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2\right]^{1/2}+\frac{i}{2\tau}.$$

Заметьте, что если $\omega=\omega_R+i\omega_I$, то

$$e^{i\omega t}=e^{-\omega_I t}e^{i\omega_R t},$$

т. е. решение соответствует затухающему колебанию.

17. *Вязкость.* В соответствии с законом Стокса (который справедлив при достаточно низких скоростях) коэффициент затухания сферы радиусом R, движущейся в жидкости, вязкость которой η, равен $\gamma=6\pi R\eta$.

а) Загляните в учебник для того, чтобы дать и объяснить определение *вязкости*.

б) Какова размерность вязкости?

в) Как называется единица вязкости в системе СГС?

г) Чему равна вязкость воды при 30° С?

д) Вычислите значение коэффициента затухания для сферы радиусом 10 см, движущейся в среде, вязкость которой равна 2 сантипуазам.

Ответ. ≈ 4 *г/сек.*