Дополнение 1. Точное решение задачи о колебании математического маятника

Энергия математического маятника равна

$$E=\frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2+MgL(1-\cos\theta), \tag{134}$$

или

$$\dot{\theta}^2=2\omega_0^2\cos\theta+C, \tag{135}$$

где

$$\omega_0^2=\frac{g}{L}, \quad C=\left(\frac{2E}{ML^2}-\frac{2g}{L}\right). \tag{136}$$

Предположим, что маятник начинает совершать колебания из состояния покоя, соответствующего начальному смещению θ_0, где $-\pi<\theta_0<\pi$. Пренебрегая трением, можно ожидать, что движение маятника будет периодическим, но не просто гармоническим, так что при $\theta=\pm\theta_0$ $\dot{\theta}=0$. Однако если маятник приведен в движение достаточно сильным толчком, то он будет продолжать двигаться в одном направлении. Движение будет периодически повторяться, но $\dot{\theta}$ не будет обращаться в 0 и $\theta(t)$ будет продолжать увеличиваться. Эти соображения могут быть наглядно иллюстрированы, если мы проследим за движением маятника по фазовому графику, выражающему зависимость скорости фазы $\dot{\theta}$ от фазы θ (рис. 7.24).

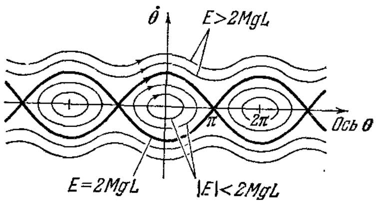

Рис. 7.24.

Такой *фазовый график* играет важную роль при решении нелинейных дифференциальных уравнений. Очевидно, что для данных значений ω_0^2 и C уравнение (135) выражает собой кривую на фазовом графике. Для различных значений этих постоянных мы получаем семейство кривых, изображенных на рисунке. *Замкнутые* кривые вокруг точки $\theta=0$ и $\dot{\theta}=0$ соответствуют значениям C и ω_0^2, допускающим периодическое движение маятника около положения равновесия; незамкнутые кривые характеризуют движение, для которого начальные значения этих постоянных соответствуют движению маятника лишь в одном направлении. Семейства замкнутых кривых вокруг точек $(2\pi n,\ 0)$ не имеют физического смысла. Из физических соображений ясно, что $C\geqslant-2\omega_0^2$, так как полная энергия не может быть отрицательной. Если $E=0$, то $C=-2\omega_0^2$; в этом случае маятник остается в покое и его состояние на фазовом графике характеризуется точкой (0, 0). Замкнутые кривые соответствуют значениям C, для которых $-2\omega_0^2<C<2\omega_0^2$, что видно из физического смысла этого условия: $2\,MgL\geqslant E$.

Мы можем найти период и частоту колебания, описываемого замкнутыми кривыми на нашем фазовом графике. Максимальное значение амплитуды будет достигнуто, когда $\dot{\theta}=0$; таким образом,

$$\cos\theta_0=-\frac{C}{2\omega_0^2}. \tag{137}$$

Период T в четыре раза больше времени, необходимого для того, чтобы маятник из положения, соответствующего $\theta=0$, отклонился на угол $\theta=\theta_0$. Из (135) мы получаем

$$\frac{d\theta}{dt}=\dot{\theta}=(2\omega_0^2\cos\theta+C)^{1/2}; \tag{138}$$

период равен

$$T=4\int\limits_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{(2\omega_0^2\cos\theta+C)^{1/2}}=\frac{4}{(2\omega_0^2)^{1/2}}\int\limits_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{(\cos\theta-\cos\theta_0)^{1/2}}. \qquad (139)$$

Преобразуем теперь этот интеграл, введя новую переменную ψ из соотношения

$$\sin\psi=\frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_0/2)}. \qquad (140)$$

а) Предлагается показать, что

$$T=\frac{4}{\omega_0}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{[1-\sin^2(\theta_0/2)\sin^2\psi]^{1/2}}. \qquad (141)$$

Интеграл

$$\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{(1-K^2\sin^2\psi)^{1/2}}$$

называется *полным эллиптическим интегралом первого рода*; существуют подробные таблицы значений интегралов такого типа для разных K^2. В этом интеграле K представляет собой постоянную величину. Решение эллиптического интеграла в виде ряда имеет следующий вид:

$$\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{(1-K^2\sin^2\psi)^{1/2}}=\frac{\pi}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}\right]^2K^{2n}\right\}. \qquad (142)$$

Если мы выпишем несколько первых членов, то получим

$$\omega=\omega_0\left[1+\frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)+\frac{9}{64}\sin^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right)+\ldots\right]^{-1}\cong\omega_0\left(1-\frac{1}{16}\theta_0^2+\ldots\right) \qquad (143)$$

в соответствии с (38).

б) Показать, что при $\theta_0=\pi/2$ $\omega=0{,}847\omega_0$.

Дополнение 2. **Ангармонический осциллятор**

Вообще говоря, нет никаких физических причин, в силу которых для реальной пружины зависимость силы от смещения не должна содержать членов выше первой степени, т. е. x^2 или x^3, а следовательно, потенциальная энергия — соответственно членов x^3 или x^4. Функция потенциальной энергии для реальной пружины может быть и несимметричной относительно положения равновесия. Если потенциальная энергия пружины выражается соотношением

$$U(x)=\frac{1}{2}Cx^2-\frac{1}{3}sCx^3, \qquad (144)$$

где s — постоянная ангармоничности, то упругая сила будет равна *)

$$F_x=-\frac{dU}{dx}=-Cx+sCx^2. \qquad (145)$$

Знак минус в (144) введен для того, чтобы выполнялось общее физическое условие, при котором сила должна уменьшаться для больших положительных значений x.

---

*) При этом сила обращается в нуль как при $x=0$, так и при $x=1/s$. Предполагается, что амплитуда движения мала по сравнению с $1/s$, так что частица при $x=0$ остается вблизи минимума потенциальной энергии, выражаемой соотношением (144).