период равен

$$T=4\int\limits_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{(2\omega_0^2\cos\theta+C)^{1/2}}=\frac{4}{(2\omega_0^2)^{1/2}}\int\limits_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{(\cos\theta-\cos\theta_0)^{1/2}}. \qquad (139)$$

Преобразуем теперь этот интеграл, введя новую переменную ψ из соотношения

$$\sin\psi=\frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_0/2)}. \qquad (140)$$

а) Предлагается показать, что

$$T=\frac{4}{\omega_0}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{[1-\sin^2(\theta_0/2)\sin^2\psi]^{1/2}}. \qquad (141)$$

Интеграл

$$\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{(1-K^2\sin^2\psi)^{1/2}}$$

называется *полным эллиптическим интегралом первого рода*; существуют подробные таблицы значений интегралов такого типа для разных K^2. В этом интеграле K представляет собой постоянную величину. Решение эллиптического интеграла в виде ряда имеет следующий вид:

$$\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{(1-K^2\sin^2\psi)^{1/2}}=\frac{\pi}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}\right]^2K^{2n}\right\}. \qquad (142)$$

Если мы выпишем несколько первых членов, то получим

$$\omega=\omega_0\left[1+\frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)+\frac{9}{64}\sin^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right)+\ldots\right]^{-1}\cong\omega_0\left(1-\frac{1}{16}\theta_0^2+\ldots\right) \qquad (143)$$

в соответствии с (38).

б) Показать, что при $\theta_0=\pi/2$ $\omega=0{,}847\omega_0$.

Дополнение 2. **Ангармонический осциллятор**

Вообще говоря, нет никаких физических причин, в силу которых для реальной пружины зависимость силы от смещения не должна содержать членов выше первой степени, т. е. x^2 или x^3, а следовательно, потенциальная энергия — соответственно членов x^3 или x^4. Функция потенциальной энергии для реальной пружины может быть и несимметричной относительно положения равновесия. Если потенциальная энергия пружины выражается соотношением

$$U(x)=\frac{1}{2}Cx^2-\frac{1}{3}sCx^3, \qquad (144)$$

где s — постоянная ангармоничности, то упругая сила будет равна *)

$$F_x=-\frac{dU}{dx}=-Cx+sCx^2. \qquad (145)$$

Знак минус в (144) введен для того, чтобы выполнялось общее физическое условие, при котором сила должна уменьшаться для больших положительных значений x.

*) При этом сила обращается в нуль как при $x=0$, так и при $x=1/s$. Предполагается, что амплитуда движения мала по сравнению с $1/s$, так что частица при $x=0$ остается вблизи минимума потенциальной энергии, выражаемой соотношением (144).

Уравнение движения становится нелинейным:

$$M\ddot{x}+Cx+sCx^2=0, \qquad \ddot{x}+\omega_0^2x-s\omega_0^2x^2=0. \tag{146}$$

Присутствие члена x^2 делает это уравнение нелинейным. Будем искать решение этого уравнения в виде

$$x=A(\cos\omega t+q\cos 2\omega t)+x_1, \tag{147}$$

где q и x_1 — постоянные, которые должны быть определены. Выбор именно $\cos\omega t$ вызван исключительно соображениями удобства, так как можно использовать любую линейную комбинацию $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$. Однако, когда мы выбираем $\cos\omega t$, математики учат нас, что следует также брать и $\cos 2\omega t$. Мы находим, что

$$\ddot{x}=-\omega^2A(\cos\omega t+4q\cos 2\omega t), \tag{148}$$

$$x^2=A^2(\cos^2\omega t+\ldots)=$$

$$=\frac{1}{2}A^2+\frac{1}{2}A^2\cos 2\omega t+\ldots, \tag{149}$$

где использовано тождество

$$\cos^2\omega t=\frac{1}{2}(1+\cos 2\omega t).$$

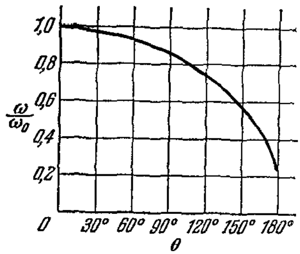

Рис. 7.25.

В выражении для x^2 мы пренебрегли членами, содержащими q и x_1, так как x^2 входит в уравнение движения в виде произведения на s. Мы считаем, что $sA \ll 1$. Дифференциальное уравнение (146) приобретает вид

$$-\omega^2A(\cos\omega t+4q\cos 2\omega t)+\omega_0^2A(\cos\omega t+q\cos 2\omega t)+$$

$$+\omega_0^2x_1-\frac{1}{2}s\omega_0^2A^2-\frac{1}{2}s\omega_0^2A^2\cos 2\omega t+\ldots=0. \tag{150}$$

Условие, при котором коэффициент при $\cos\omega t$ в (150) будет стремиться к нулю, выражается соотношением

$$-\omega^2+\omega_0^2=0. \tag{151}$$

Таким образом, в этом приближении частота не изменяется. Условие, при котором коэффициент при $\cos 2\omega t$ будет стремиться к нулю, имеет вид

$$-3q-\frac{1}{2}sA=0, \qquad q=-\frac{1}{6}sA. \tag{152}$$

Из (150) находим для смещения x_1:

$$x_1-\frac{1}{2}sA^2=0, \qquad x_1=\frac{1}{2}sA^2. \tag{153}$$

Среднее по времени положение мы найдем из (147):

$$\langle x\rangle=A(\langle\cos\omega t\rangle+q\langle\cos 2\omega t\rangle)+x_1. \tag{154}$$

Так как $\langle\cos\omega t\rangle=0$ и $\langle\cos 2\omega t\rangle=0$, то

$$\langle x\rangle=x_1=\frac{1}{2}sA^2. \tag{155}$$

В электрической аналогии этой задачи применение в нелинейном электрическом контуре переменного напряжения приводит к появлению в этом контуре постоянной составляющей напряжения. Какие вы можете назвать типы элементов нелинейного электрического контура?

Из (145) мы видим, что восстанавливающая сила больше для отрицательных значений x, чем для положительных. Поэтому неудивительно, что перемещение, соответствующее (155) и выражающее среднее положение колеблющейся частицы, будет соответствовать положительному направлению оси x, в котором восстанавливающая сила слабее. Смещение (155) пропорционально постоянной ангармоничности s и квадрату амплитуды колебания. Мы знаем из полученных ранее результатов, что энергия гармонического осциллятора пропорциональна A^2. Из статистической физики (т. V) следует, что средняя энергия классического гармонического осциллятора в тепловом равновесии равна kT *), где k — постоянная Больцмана и T — абсолютная температура. Если это верно, то приближенно мы можем считать, что

$$\langle x \rangle \backsim A^2 \backsim T. \qquad (156)$$

Этот вывод позволяет объяснить термическое расширение твердых тел **). Экспериментальные результаты для кристалла хлористого калия приведены на рис. 7.26.

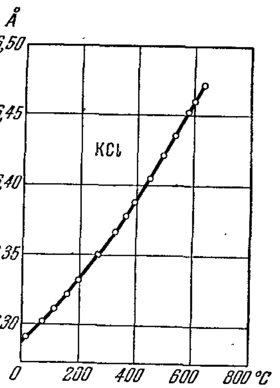

Рис. 7.26. Зависимость длины ребра кубической ячейки кристалла хлористого калия (KCl) от температуры (°C). *(По Р. Е. Гловеру)*

Дополнение 3. Модулирование параметров осциллятора (параметрическое усиление)

Теперь мы рассмотрим замечательный и в то же время важный эффект параметрического усиления, или возбуждение субгармоник модуляцией одного из физических параметров осциллятора. Например, в контуре, состоящем из сопротивления R, самоиндукции L и емкости C, физическими параметрами осциллятора являются R, L и C. Мы можем модулировать (изменять) значение одной из этих величин. Предположим, что в контуре, не совершающем вынужденных колебаний, мы изменяем или модулируем емкость, изменяя расстояние между пластинами ***).

Особый интерес представляет случай модуляции с частотой $2\omega_0$, где ω_0 — первоначальная частота осциллятора. Предположим, что затухание мало. Напишем уравнение осциллятора в следующем виде:

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 [1 - \varepsilon \sin 2\omega_0 t]\, x = 0, \qquad (157)$$

где $\varepsilon \ll 1$. Член, содержащий ε, характеризует модуляцию с частотой $2\omega_0$ восстанавливающей силы осциллятора. Будем искать решение этого уравнения в виде функции от частоты, представляющей собой резонансную частоту контура, равную

---

*) Вывод о том, что тепловая энергия пропорциональна температуре, справедлив почти для всех твердых тел при комнатной и более высоких температурах и несправедлив при низких температурах вследствие квантовых эффектов, рассматриваемых в т. IV.

**) Потенциальная энергия взаимодействия двух атомов для отрицательных значений x обычно существенно отрицательна (т. е. соответствует отталкиванию), и поэтому s и $\langle x \rangle$ положительны, что соответствует расширению твердых тел при их нагревании. Немногие известные случаи сжатия твердых тел при нагревании связаны преимущественно с эффектами магнитного упорядочения спинов электронов. Для сплавов с малым коэффициентом расширения, например, таких, как инвар, тепловое расширение и магнитное сжатие взаимно компенсируют друг друга в той области температур, которая представляет практический интерес.

***) Это правильный, но слишком грубый метод; в микроволновых приемниках емкость полупроводникового диода изменяется в результате изменения напряжения, приложенного к диоду. Для этого широко используется модулятор на диодах, который называется вариконд. Модуляция емкости аналогична модуляции жесткости пружины. В принципе жесткость может быть модулирована попеременным нагреванием и охлаждением пружины в том случае, если значение C зависит от температуры.