будет соответствовать положительному направлению оси $x$, в котором восстанавливающая сила слабее. Смещение (155) пропорционально постоянной ангармоничности $s$ и квадрату амплитуды колебания. Мы знаем из полученных ранее результатов, что энергия гармонического осциллятора пропорциональна $A^2$. Из статистической физики (т. V) следует, что средняя энергия классического гармонического осциллятора в тепловом равновесии равна $kT$ *), где $k$ — постоянная Больцмана и $T$ — абсолютная температура. Если это верно, то приближенно мы можем считать, что

$$\langle x \rangle \backsim A^2 \backsim T. \tag{156}$$

Этот вывод позволяет объяснить термическое расширение твердых тел **). Экспериментальные результаты для кристалла хлористого калия приведены на рис. 7.26.

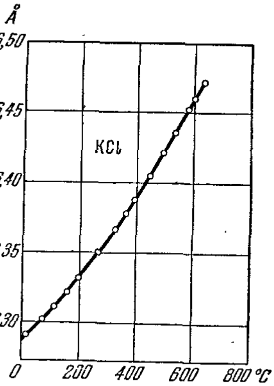


Рис. 7.26. Зависимость длины ребра кубической ячейки кристалла хлористого калия (KCl) от температуры (°C). *(По Р. Е. Гловеру)*

Дополнение 3. **Модулирование параметров осциллятора (параметрическое усиление)**

Теперь мы рассмотрим замечательный и в то же время важный эффект параметрического усиления, или возбуждение субгармоник модуляцией одного из физических параметров осциллятора. Например, в контуре, состоящем из сопротивления $R$, самоиндукции $L$ и емкости $C$, физическими параметрами осциллятора являются $R, L$ и $C$. Мы можем модулировать (изменять) значение одной из этих величин. Предположим, что в контуре, не совершающем вынужденных колебаний, мы изменяем или модулируем емкость, изменяя расстояние между пластинами ***).

Особый интерес представляет случай модуляции с частотой $2\omega_0$, где $\omega_0$ — первоначальная частота осциллятора. Предположим, что затухание мало. Напишем уравнение осциллятора в следующем виде:

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2[1 - \varepsilon \sin 2\omega_0 t]\, x = 0, \tag{157}$$

где $\varepsilon \ll 1$. Член, содержащий $\varepsilon$, характеризует модуляцию с частотой $2\omega_0$ восстанавливающей силы осциллятора. Будем искать решение этого уравнения в виде функции от частоты, представляющей собой резонансную частоту контура, равную

*) Вывод о том, что тепловая энергия пропорциональна температуре, справедлив почти для всех твердых тел при комнатной и более высоких температурах и несправедлив при низких температурах вследствие квантовых эффектов, рассматриваемых в т. IV.

**) Потенциальная энергия взаимодействия двух атомов для отрицательных значений $x$ обычно существенно отрицательна (т. е. соответствует отталкиванию), и поэтому $s$ и $\langle x \rangle$ положительны, что соответствует расширению твердых тел при их нагревании. Немногие известные случаи сжатия твердых тел при нагревании связаны преимущественно с эффектами магнитного упорядочения спинов электронов. Для сплавов с малым коэффициентом расширения, например, таких, как инвар, тепловое расширение и магнитное сжатие взаимно компенсируют друг друга в той области температур, которая представляет практический интерес.

***) Это правильный, но слишком грубый метод; в микроволновых приемниках емкость полупроводникового диода изменяется в результате изменения напряжения, приложенного к диоду. Для этого широко используется модулятор на диодах, который называется вариконд. Модуляция емкости аналогична модуляции жесткости пружины. В принципе жесткость может быть модулирована попеременным нагреванием и охлаждением пружины в том случае, если значение $C$ зависит от температуры.

половине частоты модуляции:

$$x=e^{\beta t}\sin\omega_0 t. \qquad (158)$$

Экспоненциальный множитель $e^{\beta t}$ фигурирует здесь потому, что при отсутствии модуляции амплитуда будет уменьшаться; мы можем ожидать, что при значительной амплитуде модуляции $\varepsilon$ могут существовать решения, возрастающие со временем по экспоненциальному закону. Это значит, что модуляция может привести систему к еще бо́льшим колебаниям.

Подставляя (158) в (157), мы находим для каждого члена в отдельности:

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}&=\omega_0^2 e^{\beta t}\sin\omega_0 t+2\beta\omega_0 e^{\beta t}\cos\omega_0 t+\beta^2 e^{\beta t}\sin\omega_0 t,\\ \frac{1}{\tau}\dot{x}&=\frac{\beta}{\tau}e^{\beta t}\sin\omega_0 t+\frac{\omega_0}{\tau}e^{\beta t}\cos\omega_0 t,\\ \omega_0^2 x&=\omega_0^2 e^{\beta t}\sin\omega_0 t,\\ -\varepsilon\omega_0^2 x\sin 2\omega_0 t&=-\frac{1}{2}\varepsilon\omega_0^2 e^{\beta t}(\cos\omega_0 t-\cos 3\omega_0 t).\end{aligned}\right\} \qquad (159)$$

В последней строчке мы использовали тождество

$$2(\sin 2\omega_0 t)\sin\omega_0 t=\cos\omega_0 t-\cos 3\omega_0 t. \qquad (160)$$

Теперь мы предположим, что в (159) член, содержащий $\beta^2$, где $\beta\ll\omega_0$, мал по сравнению с членом, содержащим $\beta\omega_0$ и $\omega_0^2$. Это согласуется с окончательным решением. Кроме того, коэффициент у членов, содержащих $\sin\omega_0 t$, стремится к нулю. Условие, что члены, содержащие $\cos\omega_0 t$, обращаются в нуль, имеет вид

$$2\beta\omega_0+\frac{\omega_0}{\tau}-\frac{1}{2}\varepsilon\omega_0^2=0, \qquad (161)$$

или

$$\beta=\frac{1}{4}\varepsilon\omega_0-\frac{1}{2\tau}. \qquad (162)$$

Поэтому $\beta$ окажется положительным и амплитуда $x$ будет возрастать экспоненциально со временем, если

$$\varepsilon>\frac{2}{\omega_0\tau}. \qquad (163)$$

Это неравенство представляет собой условие колебаний контура с частотой $\omega_0$ при частоте модуляции $2\omega_0$. Мы н е п о к а з а л и, что $\omega_0$ будет единственной частотой, наблюдаемой в системе. Заметим, что выше мы условились, что $\beta\ll\omega_0$. Из уравнения (162) получим

$$\varepsilon\ll 4+\frac{2}{\omega_0\tau}. \qquad (164)$$

Ясно, что мы можем выбрать $\varepsilon$ таким образом, чтобы одновременно удовлетворить (162) и (163), если положить $\frac{2}{\omega_0\tau}\ll 4$, т. е. если $Q=\omega_0\tau\gg 1/2$.

Что можно сказать относительно члена, содержащего $\cos 3\omega_0 t$? В пределах рассматриваемого приближения мы не можем учесть этот член. Разумеется, из этого рассмотрения мы не можем судить о важности этого члена. Уравнение (157) можно точно решить с помощью табулированных функций, называемых функциями Матье, и получить результаты, согласующиеся с нашим приближенным рассмотрением. (Теория функций Матье не является элементарной.) Для того чтобы убедиться в существовании параметрического усиления, проще всего заменить синусоидальную модуляцию модуляцией сигналом прямоугольной формы. Это предоставляется сделать учащемуся. Прежде всего напишем вместо (157) уравнение

$$\ddot{x}+\frac{1}{\tau}\dot{x}+\omega_0^2(1\pm\varepsilon)x=0, \qquad (165)$$

где $-\varepsilon$ относится к промежутку времени от 0 до $\pi/2\omega_0$, а $+\varepsilon$ — к промежутку от $\pi/2\omega_0$ до $\pi/\omega_0$ и т. д. В пределах каждого промежутка времени уравнение (165) выражает поведение простого гармонического осциллятора, и оно легко может быть решено точно. Для любых двух промежутков собственные частоты являются, конечно, разными. Вы получите полное точное решение, выбирая соответствующие граничные условия в конечных точках интервала. Граничные условия заключаются в том, что $x$ и $\dot{x}$ всюду должны быть непрерывными.

### Математическое дополнение. **Комплексные числа и гармонический осциллятор, совершающий вынужденные колебания**

Мы приведем теперь в очень кратком виде решение задачи о гармоническом осцилляторе, совершающем вынужденные колебания, используя комплексные числа по схеме, изложенной в конце гл. 4. Уравнение движения (165) можно записать теперь в такой форме (для удобства вместо $\sin \omega t$ будем писать $\cos \omega t$):

$$\ddot{x}+\frac{1}{\tau}\dot{x}+\omega_0^2 x=\alpha_0 \cos \omega t. \qquad (166)$$

Заменим теперь член, характеризующий силу, следующим выражением:

$$\alpha_0 e^{i\omega t} \equiv \alpha_0 (\cos \omega t + i \sin \omega t). \qquad (167)$$

В конце вычисления мы можем принять за решение вещественную часть $x$, если вынуждающая сила равна $\alpha_0 \cos \omega t$ ($\alpha_0$ — вещественная величина).

Решение (166) будем искать в виде

$$x=X_0 e^{i\omega t}, \qquad (168)$$

где $X_0$ может быть комплексным числом. Подставляя (168) в (166), получаем

$$\left(-\omega^2+\frac{i\omega}{\tau}+\omega_0^2\right) X_0 e^{i\omega t}=\alpha_0 e^{i\omega t}. \qquad (169)$$

Отсюда находим, что

$$X_0=\frac{\alpha_0}{\omega_0^2-\omega^2+i(\omega/\tau)}. \qquad (170)$$

Полезно отдельно рассмотреть вещественную и мнимую части этой величины. Из (170) находим, что

$$X_0=\frac{\alpha_0}{\omega_0^2-\omega^2+i(\omega/\tau)}\cdot\frac{\omega_0^2-\omega^2-i(\omega/\tau)}{\omega_0^2-\omega^2-i(\omega/\tau)}=\alpha_0\,\frac{\omega_0^2-\omega^2-i(\omega/\tau)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega/\tau)^2} \qquad (171)$$

и соответственно вещественная и мнимая части равны

$$\operatorname{Re}(X_0)=\frac{(\omega_0^2-\omega^2)\alpha_0}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega/\tau)^2}, \qquad (172)$$

$$\operatorname{Im}(X_0)=\frac{-(\omega/\tau)\alpha_0}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega/\tau)^2}.$$

В предельном случае $|\omega_0^2-\omega^2| \gg \omega/\tau$ мы получаем

$$\operatorname{Re}(X_0)\approx\frac{\alpha_0}{\omega_0^2-\omega^2}, \qquad \operatorname{Im}(X_0)\approx 0. \qquad (173)$$

Это условие называется нерезонансным, и в этом случае вещественная часть $X_0$ гораздо важней, чем мнимая часть.