где $-\varepsilon$ относится к промежутку времени от 0 до $\pi/2\omega_0$, а $+\varepsilon$ — к промежутку от $\pi/2\omega_0$ до π/ω_0 и т. д. В пределах каждого промежутка времени уравнение (165) выражает поведение простого гармонического осциллятора, и оно легко может быть решено точно. Для любых двух промежутков собственные частоты являются, конечно, разными. Вы получите полное точное решение, выбирая соответствующие граничные условия в конечных точках интервала. Граничные условия заключаются в том, что x и $\dot{x}$ всюду должны быть непрерывными.

Математическое дополнение. **Комплексные числа и гармонический осциллятор, совершающий вынужденные колебания**

Мы приведем теперь в очень кратком виде решение задачи о гармоническом осцилляторе, совершающем вынужденные колебания, используя комплексные числа по схеме, изложенной в конце гл. 4. Уравнение движения (165) можно записать теперь в такой форме (для удобства вместо $\sin\omega t$ будем писать $\cos\omega t$):

$$\ddot{x}+\frac{1}{\tau}\dot{x}+\omega_0^2 x=\alpha_0\cos\omega t. \tag{166}$$

Заменим теперь член, характеризующий силу, следующим выражением:

$$\alpha_0 e^{i\omega t}\equiv\alpha_0(\cos\omega t+i\sin\omega t). \tag{167}$$

В конце вычисления мы можем принять за решение вещественную часть x, если вынуждающая сила равна $\alpha_0\cos\omega t$ (α_0 — вещественная величина).

Решение (166) будем искать в виде

$$x=X_0 e^{i\omega t}, \tag{168}$$

где X_0 может быть комплексным числом. Подставляя (168) в (166), получаем

$$\left(-\omega^2+\frac{i\omega}{\tau}+\omega_0^2\right)X_0 e^{i\omega t}=\alpha_0 e^{i\omega t}. \tag{169}$$

Отсюда находим, что

$$X_0=\frac{\alpha_0}{\omega_0^2-\omega^2+i(\omega/\tau)}. \tag{170}$$

Полезно отдельно рассмотреть вещественную и мнимую части этой величины. Из (170) находим, что

$$X_0=\frac{\alpha_0}{\omega_0^2-\omega^2+i(\omega/\tau)}\cdot\frac{\omega_0^2-\omega^2-i(\omega/\tau)}{\omega_0^2-\omega^2-i(\omega/\tau)}=\alpha_0\frac{\omega_0^2-\omega^2-i(\omega/\tau)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega/\tau)^2} \tag{171}$$

и соответственно вещественная и мнимая части равны

$$\mathrm{Re}(X_0)=\frac{(\omega_0^2-\omega^2)\alpha_0}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega/\tau)^2}, \tag{172}$$

$$\mathrm{Im}(X_0)=\frac{-(\omega/\tau)\alpha_0}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega/\tau)^2}.$$

В предельном случае $|\omega_0^2-\omega^2|\gg\omega/\tau$ мы получаем

$$\mathrm{Re}(X_0)\approx\frac{\alpha_0}{\omega_0^2-\omega^2},\qquad \mathrm{Im}(X_0)\approx 0. \tag{173}$$

Это условие называется внерезонансным, и в этом случае вещественная часть X_0 гораздо важней, чем мнимая часть.

В пределе при $|\omega_0^2-\omega^2| \ll \omega/\tau$ мы говорим, что находимся *вблизи резонанса*, и при $\omega=\omega_0$ наступает *резонанс*, или центр резонанса. При $\omega=\omega_0$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Re}(X_0)&=0, \\ \operatorname{Im}(X_0)&=\alpha_0 \frac{\tau}{\omega}. \end{aligned}\right\} \tag{174}$$

При больших значениях τ затухание ослабляется и увеличивается мнимая часть смещения при резонансе.

Запишем X_0 в форме $\rho e^{i\varphi}$, как в конце гл. 4. Тогда из (170) мы получаем для амплитуды смещения

$$\rho=(X_0X_0^*)^{1/2}=\frac{\alpha_0}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega/\tau)^2]^{1/2}}. \tag{175}$$

Здесь X_0^* — комплексная величина, сопряженная X_0, так что произведение $X_0X_0^*$ представляет собой вещественную величину. Из (171) мы находим

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\omega/\tau}{\omega_0^2-\omega^2}, \tag{176}$$

где φ — угол между x и F.

Средняя поглощенная мощность равна

$$\langle P\rangle=\langle F\dot{x}\rangle=\langle\operatorname{Re}(F)\operatorname{Re}(\dot{x})\rangle=\langle[M\alpha_0\cos\omega t]\,[-\rho\omega\sin(\omega t+\varphi)]\rangle. \tag{177}$$

Мы выбрали вещественную часть x для того, чтобы наше решение соответствовало физическим условиям в том случае, когда вещественная часть F представляет собой реальную силу. Существуют другие способы вычисления среднего по времени значения, исключающие необходимость рассмотрения той части x, которая имеет одинаковую фазу с F. Используя (172) и соотношение $\rho\sin\varphi=\operatorname{Im}(X_0)$, мы получаем из (177)

$$\begin{aligned}\langle P\rangle&=-M\alpha_0\rho\omega\,\langle\cos^2\omega t\rangle\sin\varphi= \\ &=-\frac{1}{2}M\alpha_0\omega\operatorname{Im}(X_0)=\frac{1}{2}M\alpha_0^2\frac{\omega^2/\tau}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}.\end{aligned} \tag{178}$$

Этот результат аналогичен выводу, полученному ранее в виде соотношения (129).