ГЛАВА 8

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ДИНАМИКА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Динамика твердых тел представляет собой увлекательный и вместе с тем сложный предмет, являющийся венцом классической механики и в то же время наиболее трудным ее разделом. (Эта глава при первом чтении данного тома может быть пропущена *).) Сложность задачи состоит в том, что нам нужно одновременно искать решение трех дифференциальных уравнений для компонент угловой скорости. Мы должны рассматривать результаты как в системе отсчета, связанной с вращающимся телом, так и в инерциальной системе отсчета, в которой центр масс тела покоится. Прототипом всех задач динамики твердых тел является задача о гироскопе. Весьма полная теория гироскопа изложена в четырехтомной монографии Ф. Клейна и А. Зоммерфельда «Теория волчков».

Основная цель этой небольшой главы заключается в том; чтобы получить точные уравнения движения твердого тела и раскрыть их содержание. Для решения этой задачи у нас есть все необходимое. Под твердым телом мы понимаем собрание частиц, взаимные расстояния между которыми не изменяются. Поэтому мы не рассматриваем задачи, в которых тело деформируется или колеблется в результате вращения. В этой главе приводится решение нескольких элементарных задач, таких, как задача о гироскопе и задача об электроне или ядерном спиновом резонансе в магнитном поле.

8.1. Уравнения движения вращающегося тела

В гл. 6 мы видели, что вращательное движение группы частиц описывается уравнением движения

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt}=\mathbf{N}. \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{J}$ — момент импульса и $\mathbf{N}$ — момент вращения. Обе эти величины должны быть отнесены к соответствующим образом выбранному общему началу отсчета, за который обычно (но не всегда)

*) При первом чтении этой главы рекомендуется остановиться на уравнении (6); при втором чтении можно остановиться на уравнении (47). Последующий материал более труден и требует для усвоения много времени и упорства.

принимается центр масс тела. Тогда

$$\mathbf{J}=\sum M_n \mathbf{r}_n \times \mathbf{v}_n, \quad \mathbf{N}=\sum \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_n, \tag{2}$$

где $\mathbf{F}_n$— внешняя сила, действующая на n-ю частицу.

Основная физическая идея этой главы может быть иллюстрирована на простом примере тонкого круглого обруча (радиуса R), вращающегося относительно оси, перпендикулярной к плоскости обруча и проходящей через центр круга. В этом случае вся масса M обруча находится на одинаковом расстоянии от оси и величина момента импульса $\mathbf{J}$ равна

$$J=MRv=MR^2\omega. \tag{3}$$

Здесь мы использовали также тот факт, что все точки обруча движутся с одинаковой скоростью, равной $R\omega$. Из формулы (3) видно, что произведение MR^2 характеризует свойство самого обруча. Величину

$$I=MR^2 \tag{4}$$

обычно называют *моментом инерции* обруча при его вращении относительно вполне определенной оси. Тогда $J=I\omega$, и мы можем написать, что

$$\mathbf{J}=I\boldsymbol{\omega}. \tag{5}$$

В этом случае соблюдается условие, при котором ось вращения остается перпендикулярной к плоскости обруча.

В дальнейшем мы рассмотрим обобщение понятия момента инерции для тел произвольной формы и произвольного распределения массы.

Если радиус обруча равен 100 *см* и масса равна 1 *кг*, то $I=10^3$ *г*$\cdot(10^2$ *см*$)^2=10^7$ *г*$\cdot$*см*^{2}. Момент импульса при угловой скорости 100 *рад/сек* равен $J=10^7$ *г*$\cdot$*см*$^2\cdot 10^2$ *сек*$^{-1}=10^9$ *г*$\cdot$*см*^{2}/*сек*$=10^9$ *эрг*$\cdot$*сек*. Если к ободу приложена сила, равная 10^4 *дин* и направленная параллельно оси вращения, то момент этой силы $N=10^2$ *см*$\cdot 10^4$ *дин*$=10^6$ *дин*$\cdot$*см*. Направление этого момента совпадает с направлением векторного произведения $\mathbf{r}\times\mathbf{F}$ и перпендикулярно к оси вращения.

Из (1) мы видим, что если момент приложен лишь в течение короткого промежутка времени Δt, то $\Delta\mathbf{J}=\mathbf{N}\,\Delta t$. Это указывает на то, что в результате кратковременного приложения момента вектор $\mathbf{J}$ поворачивается в направлении вектора $\Delta\mathbf{J}$; существенно, однако, заметить, что направление вектора $\Delta\mathbf{J}$ не совпадает с направлением силы $\mathbf{F}$, а перпендикулярно к ней. Это замечательное свойство вращающихся систем. Только что приведенное рассуждение имеет смысл лишь в том случае, когда $\Delta J \ll J$, т. е. когда первоначально тело уже вращалось. Для рассмотренного выше числового примера промежуток времени $\Delta t=10$ *сек* может считаться коротким, так как в этом случае величина $\Delta J=N\,\Delta t=10^6$ *дин*$\cdot$*см*$\cdot 10$ *сек*$=10^7$ *эрг*$\cdot$*сек* мала по сравнению с величиной $J=10^9$ *эрг*$\cdot$*сек*.

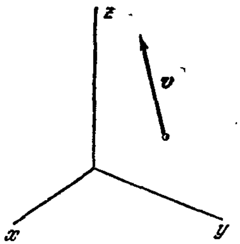

Рис. 8.1. Частица, движущаяся без всяких ограничений, обладает тремя степенями свободы ($f=3$).

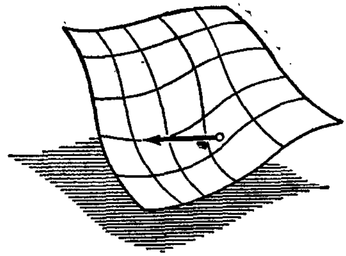

Рис. 8.2. Частица, движение которой ограничено поверхностью, обладает уже только двумя степенями свободы ($f=2$).

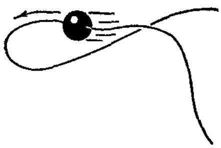

Рис. 8.3. Шарик, который скользит по проволоке, имеет всего только одну степень свободы ($f=1$).

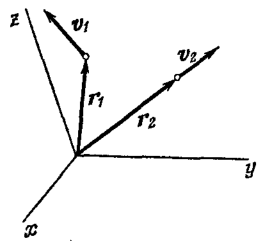

Рис. 8.4. Система из двух свободных частиц обладает $f=(2\times3)=6$ степенями свободы.

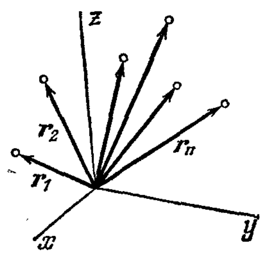

Рис 8.5. Система из N свободных частиц имеет $f=3N$ степеней свободы.

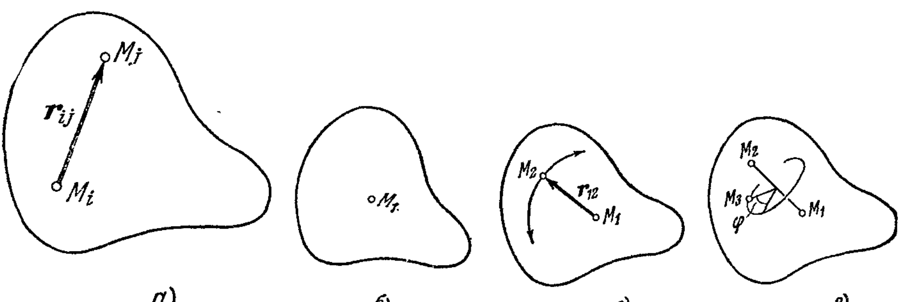

Рис. 8.6. *а*) Твердое тело состоит из многих частиц, но одновременно существует и много связей. Вектор $\mathbf{r}_{ij}$, определяющий расстояние между двумя частицами M_i и M_j, задан. Поэтому $f \ll 3N$. *б*) Допустим, что в теле мы выбрали частицу M_1. Эта частица обладает тремя степенями свободы. *в*) Пусть выбрана система отсчета, в которой точка M_1 неподвижна. Тогда точка M_2 будет иметь уже только две степени свободы, так как она может двигаться по поверхности сферы радиусом $\mathbf{r}_{12}$. *г*) Пусть система отсчета выбрана так, что M_1 и M_2 неподвижны, а какая-то другая частица M_3 в теле имеет только одну степень свободы и, следовательно, может двигаться по окружности, изображенной на чертеже. В этом случае твердое тело обладает числом степеней свободы $f=6$.

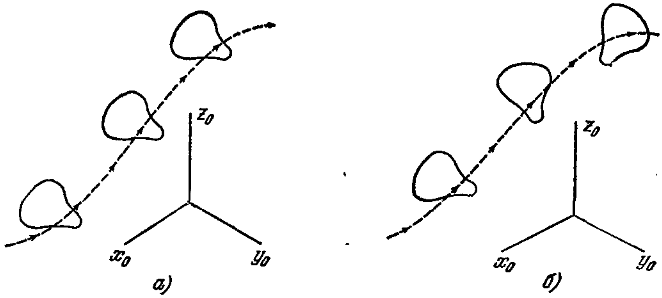

Рис. 8.7. *а*) Другой случай: наше твердое тело может двигаться поступательно без вращения относительно инерциальной системы отсчета (x_0, y_0, z_0). В этом случае имеется три степени свободы поступательного движения. *б*) Пусть, кроме того, тело может вращаться. В этом случае существует еще три степени свободы вращательного движения, поэтому $f=3+3=6$.

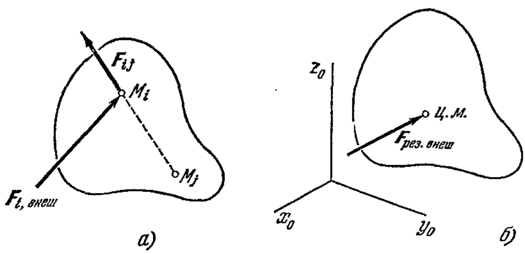

Рис. 8.8. *а*) Сила, действующая на каждую частицу массы M_i, равна $\mathbf{F}_i=\mathbf{F}_{i,\ \text{внеш}}+\sum_{j\neq i}\mathbf{F}_{ij}$. Если, однако, внутренние силы удовлетворяют третьему закону Ньютона, то они попарно уничтожаются. Поэтому (*б*) $\mathbf{F}_{\text{внеш}}=M\mathbf{a}_{\text{ц.м}}$. Центр масс движется поступательно, если к нему приложена результирующая внешняя сила и вся масса сосредоточена в этой точке.

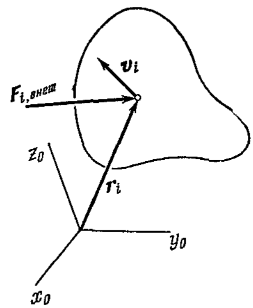

Рис. 8.9. Как вращается тело? *Относительно начала инерциальной системы отсчета* $d\mathbf{J}_{\text{рез}}/dt=\mathbf{N}_{\text{рез.внеш}}$, если внутренние силы центральные и удовлетворяют третьему закону Ньютона.

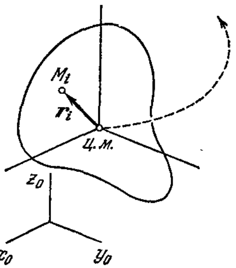

Рис. 8.10. Если тело движется поступательно, то выбор точки с координатами x_0, y_0, z_0 в качестве начала системы отсчета очень неудобен. Относительно центра масс, принятого за начало отсчета, мы также имеем $d\mathbf{J}/dt=\mathbf{N}_{\text{рез.внеш}}$! При рассмотрении задач, связанных с вращением, во многих случаях центр масс удобно принимать за начало отсчета.

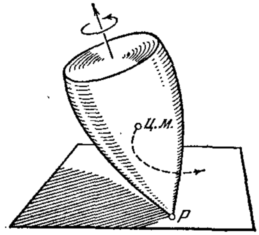

Рис. 8.11. Если точка P находится в покое (даже в том случае, когда центр масс движется, как это изображено на рисунке), то эта точка (но не центр масс) может служить началом координат.

Очень важно, чтобы был ясен вопрос о выборе начала отсчета и инерциальной системы координат. Если сумма сил равна нулю, то начало отсчета определяется положением центра масс:

$$\mathbf{R}_{\text{ц. м}} = \frac{\sum M_n \mathbf{r}_n}{\sum M_n}, \tag{6}$$

так как всегда существует такая инерциальная система отсчета, в которой центр масс собрания частиц будет покоиться при условии, что результирующая сила обращается в нуль. В общем случае тело будет вращаться относительно оси, проходящей через начало отсчета.

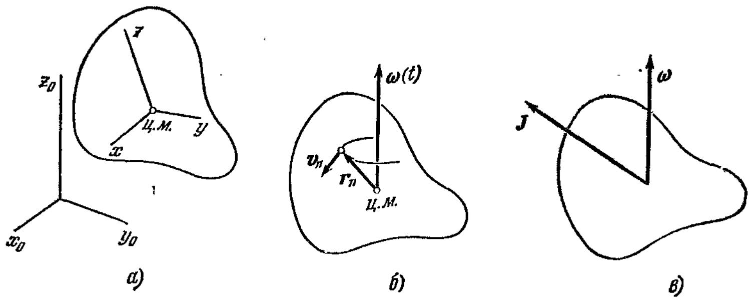

Рис. 8.12. *а*) Если мы выберем центр масс за начало координат, то получим систему отсчета (x, y, z), связанную с телом. Система отсчета (x_0, y_0, z_0) представляет собой инерциальную систему, и ее не следует путать с системой (x, y, z). *б*) В какой-то момент времени частицы тела могут приобрести угловую скорость ω относительно центра масс. Тогда мы используем оси, связанные с телом. *в*) Так как

$$\mathbf{J} = \omega \Sigma M_n r_n^2 - \Sigma M_n (\mathbf{r}_n \cdot \omega)\, \mathbf{r}_n$$

относительно осей, связанных с телом, то $\mathbf{J}$ и ω не параллельны.

Пусть мгновенное значение угловой скорости тела, вращающегося относительно оси, проходящей через начало отсчета, будет равно $\boldsymbol{\omega}$. Линейная скорость n-й частицы относительно начала отсчета, как это было показано в гл. 3, равна

$$\mathbf{v}_n = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n, \tag{7}$$

после чего (2) принимает вид

$$\mathbf{J} = \sum M_n \mathbf{r}_n \times \mathbf{v}_n = \sum M_n \mathbf{r}_n \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n). \tag{8}$$

Теперь нам нужно переписать векторное соотношение между моментом импульса $\mathbf{J}$ и угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ в компактной форме. Для этого воспользуемся векторным тождеством

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}), \tag{9}$$

в котором произведем следующие замены:

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{r}_n, \quad \mathbf{B} \longrightarrow \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{r}_n.$$

Тогда

$$\mathbf{r}_n \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_n) = \boldsymbol{\omega} r_n^2 - \mathbf{r}_n (\mathbf{r}_n \cdot \boldsymbol{\omega}). \tag{10}$$

Подставляя (10) в (8), получим

$$\mathbf{J}=\sum M_n\left[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_n^2-\mathbf{r}_n\left(\mathbf{r}_n\cdot\boldsymbol{\omega}\right)\right]. \tag{11}$$

Все частицы обладают одной и той же угловой скоростью, и поэтому формулу (11) можно переписать в проекциях на оси координат. Каждая из компонент вектора $\boldsymbol{\omega}$ будет умножаться на некоторую сумму произведений массы и положений частиц. Например, компонента вектора $\mathbf{J}$ по оси x будет равна

$$J_x=\omega_x\sum M_n r_n^2-\sum x_n\left(\mathbf{r}_n\cdot\boldsymbol{\omega}\right). \tag{12}$$

Записывая скалярное произведение $(\mathbf{r}_n\cdot\boldsymbol{\omega})$ в виде

$$(\mathbf{r}_n\cdot\boldsymbol{\omega})=x_n\omega_x+y_n\omega_y+z_n\omega_z,$$

получаем

$$J_x=\omega_x\sum M_n r_n^2-\omega_x\sum M_n x_n^2-\omega_y\sum M_n x_n y_n-\omega_z\sum M x_n z_n. \tag{13}$$

Такие же выражения можно написать для J_y и J_z.

Инерциальные коэффициенты. Мы видим, что выражение (13) содержит три коэффициента:

$$\sum M_n\left(r_n^2-x_n^2\right),\qquad -\sum M_n x_n y_n,\qquad -\sum M_n x_n z_n.$$

Каждый из этих коэффициентов зависит от распределения масс в теле и от *мгновенной* ориентации тела относительно осей координат x, y, z, которые в рассматриваемом случае совпадают с инерциальной системой отсчета. Поэтому эти коэффициенты будут зависеть от времени. Мы будем называть их *инерциальными коэффициентами* или *моментами инерции*:

$$\left.\begin{aligned}I_{xx}&\equiv\sum M_n\left(r_n^2-x_n^2\right),\\ I_{xy}&\equiv-\sum M_n x_n y_n,\\ I_{xz}&\equiv-\sum M_n x_n z_n.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Аналогичным образом можно написать соответствующие коэффициенты, входящие в выражения для J_y и J_z. Теперь мы можем написать три уравнения для компонент вектора $\mathbf{J}$, выраженного формулой (11):

$$\left.\begin{aligned}J_x&=I_{xx}\omega_x+I_{xy}\omega_y+I_{xz}\omega_z,\\ J_y&=I_{yx}\omega_x+I_{yy}\omega_y+I_{yz}\omega_z,\\ J_z&=I_{zx}\omega_x+I_{xy}\omega_y+I_{zz}\omega_z.\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Итак, мы видим, что для тела произвольной формы и с произвольным распределением массы момент импульса $\mathbf{J}$ представляет собой не просто произведение скаляра на вектор $\boldsymbol{\omega}$ угловой скорости. Поэтому в общем случае направление вектора $\mathbf{J}$ не совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{\omega}$. Это обстоятельство является причиной сложного поведения вращающихся тел. Сравнительно просто обстоит дело с задачами динамики твердых тел сферической формы, в которых, как мы увидим, вектор $\mathbf{J}$ всегда параллелен вектору $\boldsymbol{\omega}$. В отсутствие момента вращения вектор $\mathbf{J}$ сохраняет постоянство, в общем же случае для тел произвольной формы вектор $\boldsymbol{\omega}$ будет прецессировать вокруг вектора $\mathbf{J}$.

Величины I_{xx}, I_{yy} и I_{zz} называются диагональными членами матрицы

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix},$$

а все другие величины — недиагональными членами. Заметим, что диагональный член (например, I_{xx}), равный $\sum M_n(r_n^2 - x_n^2) = \sum M_n(y_n^2 + z_n^2)$, представляет собой сумму произведений каждой массы на квадрат ее расстояния от оси вращения; поэтому мы его называем «моментом инерции относительно оси». Если $\rho(\mathbf{r})$ представляет собой плотность тела в точке, радиус-вектор которой есть $\mathbf{r}$, то мы можем записать величину I в виде интегралов

$$I_{xx} = \int \rho(\mathbf{r})(r^2 - x^2)\,dV, \quad I_{xy} = -\int \rho(\mathbf{r})\,xy\,dV \quad \text{и т. д.,} \tag{16}$$

где dV — элементарный объем. Можно убедиться в правильности перехода от суммирования к интегрированию, приняв во внимание, что $\int \rho(\mathbf{r})\,dV$ представляет собой массу, содержащуюся в элементе объема, по которому проводится интегрирование.

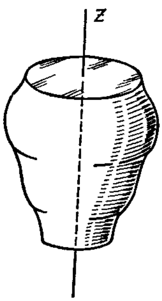

Рис. 8.13. Предположим, что у нас есть тело, обладающее аксиальной симметрией (например, относительно оси z). Тогда $J_{xy}=0$, потому что для любой точки M_n с координатами x_n, y_n существует точка M_n с координатами $-x_n$, y_n.

Сумма диагональных членов равна

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2\sum M_n r_n^2 = 2\int \rho(\mathbf{r})\,r^2\,dV, \tag{17}$$

что следует из формул (14) и (16) для I_{xx} и аналогичных формул для I_{yy} и I_{zz}. Заметим, что сумма (17) *изотропна*, т. е. не зависит от ориентации тела относительно координатных осей. Укажем также, что недиагональные члены симметричны:

$$I_{xy} = I_{yx}, \quad I_{xz} = I_{zx}, \quad I_{yz} = I_{zy}. \tag{18}$$

Пример. *Случай, когда вектор* $\mathbf{J}$ *не параллелен вектору* $\boldsymbol{\omega}$. Две массы, 200 *г* и 300 *г*, соединены легким стержнем длиной 50 *см*. Центр масс системы принят за начало декартовой системы координат. Стержень расположен в плоскости xy и образует угол в 20° с осью x. Найдем инерциальные коэффициенты I_{xx} и I_{xy}.

Прежде всего вычислим расстояние центра масс от 200-граммовой массы. Из (6) находим

$$R_{\text{ц. м}} = \frac{200\cdot 0 + 300\cdot 50}{200+300} = 30\ \text{см}.$$

Обозначим массу в 200 *г* через M_1 и выпишем ее декартовы координаты, приняв центр масс за начало отсчета:

$$x_1 = 30 \sin 20° = 30 \cdot 0{,}342 \textit{ см} \cong 10{,}3 \textit{ см},$$
$$y_1 = 30 \cos 20° = 30 \cdot 0{,}940 \textit{ см} \cong 28{,}2 \textit{ см},$$
$$z_1 = 0.$$

Декартовы координаты массы в 300 *г*, которую мы обозначим через M_2, будут равны

$$x_2 = -20 \sin 20° \cong -6{,}8 \textit{ см},$$
$$y_2 = -20 \cos 20° \cong -18{,}8 \textit{ см},$$
$$z_2 = 0.$$

Используя эти значения координат, мы можем по формулам (14) вычислить значение инерциальных координат:

$$I_{xx} = M_1 (r_1^2 - x_1^2) + M_2 (r_2^2 - x_2^2) = 200 \left[(30)^2 - (10{,}3)^2\right] + 300 \left[(20)^2 - (6{,}8)^2\right] = 2{,}65 \cdot 10^5 \textit{ г} \cdot \textit{см}^2,$$

$$I_{xy} = -M_1 x_1 y_1 - M_2 x_2 y_2 = -200 \cdot 28{,}2 \cdot 10{,}3 - 300 \cdot 6{,}8 \cdot 18{,}8 = -0{,}96 \cdot 10^5 \textit{ г} \cdot \textit{см}^2.$$

Теперь предположим, что стержень вращается вокруг оси x с угловой скоростью ω. Найдем компоненты вектора $\mathbf{J}$.

Из (15) получаем

$$J_x = I_{xx}\omega, \quad J_y = I_{xy}\omega, \quad J_z = 0,$$

где мы использовали тот факт, что $I_{zx} = 0$ для стержня в указанном выше положении, так как z_1 и z_2 равны нулю.

Отсюда

$$\frac{J_y}{J_x} = \frac{I_{xy}}{I_{xx}} = \frac{-0{,}96 \cdot 10^5}{2{,}65 \cdot 10^5} = -0{,}363.$$

Таким образом, мы видим, что в тот момент, когда стержень расположен в плоскости xy, вектор момента импульса также расположен в этой же плоскости и образует с осью x угол $\varphi = \operatorname{arctg}(-0{,}363) \cong -20°$. Поэтому вектор $\mathbf{J}$ вращается вокруг оси x и не параллелен вектору $\boldsymbol{\omega}$, а перпендикулярен к стержню.

Каким образом можно понять этот результат? Укажем прежде всего, что момент инерции стержня относительно своей собственной оси равен нулю (по нашему предположению обе массы представляют собой материальные точки). Поэтому у компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}$, параллельной стержню, отсутствует соответствующая компонента вектора $\mathbf{J}$.

Пример. *Момент инерции шарового слоя.* Вычислим инерциальные коэффициенты для тонкого однородного шарового слоя, масса единицы поверхности которого равна σ, относительно оси, проходящей через центр шара (рис. 8.14).

Отметим, прежде всего, что вследствие симметрии сферического распределения массы относительно начала системы координат все недиагональные коэффициенты I_{xy}, I_{yx}, I_{xz}, I_{zx}, I_{yz} и I_{zy} в (16) равны нулю. Это следует из того, что каждому члену в сумме или при интегральном определении, соответствующему координатам xy, в случае сферы всегда найдется член, соответствующий координатам $(-x)y$. Поэтому среднее значение $\langle xy \rangle$ по сферической поверхности равно нулю.

Кроме того, так как $r^2=x^2+y^2+z^2$, среднее значение для шарового слоя будет равно

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle r^2 \rangle. \tag{19}$$

Поэтому все диагональные коэффициенты I_{xx}, I_{yy} и I_{zz} равны между собой, а так как их сумма равна $2\sum M_n r_n^2$, каждый из них равен $\frac{2}{3}\sum M_n r_n^2$:

$$I = I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{3} \sum M_n r_n^2 = \frac{2}{3} r^2 \sum M_n = \frac{2}{3}\, 4\pi\sigma r^4. \tag{20}$$

Заметим, что масса слоя равна $4\pi r^2 \sigma$, где σ по-прежнему представляет собой поверхностную плотность (масса единицы поверхности) шарового слоя.

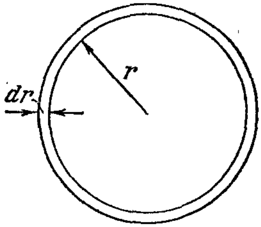

Рис. 8.14. $M_{\text{шар. сл}} = 4\pi\sigma r^2$. Однородный шаровой слой обладает аксиальной симметрией относительно x, y и z, и поэтому $I_{xy}=I_{xz}=I_{yz}=0$. Точно так же из соображений симметрии $I=I_{xx}=I_{yy}=I_{zz}=\frac{2}{3} r^2 M_{\text{шар.сл.}}$ Поэтому $I=(8\pi/3)\,\sigma \int_0^R r^4\,dr$, где σ — масса единицы поверхности шарового слоя.

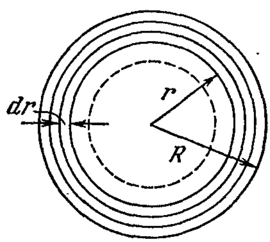

Рис. 8.15. $M=\frac{4\pi}{3}\rho R^3$. Для того чтобы найти I для однородного твердого шара, мы делим его на концентрические шаровые слои и интегрируем:

$$I=\frac{8\pi}{3}\rho \int_0^R r^4 dr = \frac{8\pi}{15}\rho R^5 = \frac{2}{5} M R^2.$$

П р и м е р. *Момент инерции шара.* Вычислим I для однородного шара, объемная плотность которого равна ρ, относительно оси, проходящей через его центр (рис. 8.15). Мы можем разбить шар на шаровые слои толщиной dr и обладающие поверхностной плотностью $\sigma = \rho\, dr$. Тогда из (20) для шара мы получаем

$$I \equiv I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{3}\int_0^R (4\pi r^4)(\rho\, dr) = \frac{8\pi\rho}{3}\int_0^R r^4\, dr =$$

$$= \frac{8\pi}{15}\rho R^5 = \frac{2}{5} MR^2. \qquad (21)$$

Здесь $M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$—масса, R — радиус шара.

Отметим, что и для шара и для шарового слоя компоненты момента импульса, вычисляемые по формулам (15), приводят к выводу, что $\mathbf{J} = I\boldsymbol{\omega}$. Таким образом, в случае шаровой симметрии вектор момента импульса всегда параллелен вектору угловой скорости.

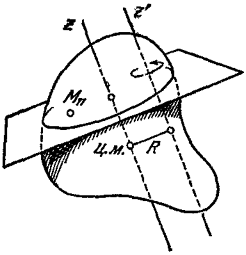

Рис. 8.16. Допустим, что мы хотим вычислить $I_{z'z'}$, где ось z' параллельна оси z. Как это можно сделать?

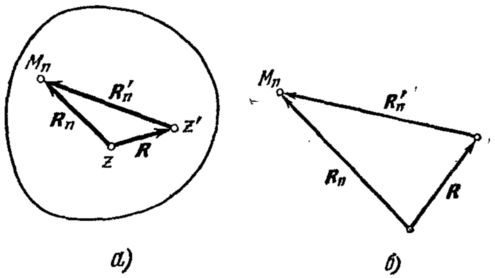

Рис. 8.17. *а*) Для любой материальной точки M_n мы можем провести плоскость, перпендикулярную к осям z и z' и проходящую через эту точку M_n (см. рис. 8.16). Тогда $R_n^2 = x_n^2 + y_n^2$. *б*) Поэтому $I_{z'z'} = \Sigma M_n R_n'^2 = \Sigma M_n \times$ $\times (\mathbf{R}_n - \mathbf{R})^2 = \Sigma M_n R_n^2 + R^2 \Sigma M_n - 2\Sigma M_n(\mathbf{R}_n \cdot \mathbf{R})$. Так как $\Sigma M_n \mathbf{R}_n = 0$, то $I_{z'z'} = MR^2 + I_{zz}$; в этом и состоит теорема о параллельных осях. Здесь $M = \Sigma M_n$ представляет собой полную массу.

Пример. *Теорема о параллельных осях* *). Вычислим I_{xx} для произвольного тела относительно оси, параллельной $\hat{\mathbf{x}}$ и расположенной на расстоянии a вдоль оси y от центра массы.

Для этого заменим в (14) все y_n на $y_n + a$, оставляя неизменными x_n и z_n. Тогда

$$\sum M_n r_n^2 \longrightarrow \sum M_n (r_n^2 + 2y_n a + a^2), \qquad (22)$$

но в то же время $\sum M_n y_n = 0$ вследствие выбора положения центра масс. Поэтому новое значение I_{xx} будет равно

$$I_{xx} = \sum M_n (r_n^2 + a^2 - x_n)^2 = I_{xx}^0 + a^2 \sum M_n, \qquad (23)$$

где $I_{xx}^0 = \sum M_n(r_n^2 - x_n^2)$ — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс. Таким образом, мы видим, что момент

*) В русской литературе эту теорему часто называют теоремой Гюйгенса — Штейнера. (*Прим. ред.*)

инерции относительно данной оси равен моменту инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, плюс момент инерции относительно данной оси, вычисленный в предположении, что вся масса тела сосредоточена в центре масс. Этот результат очень полезен при рассмотрении вращающихся тел.

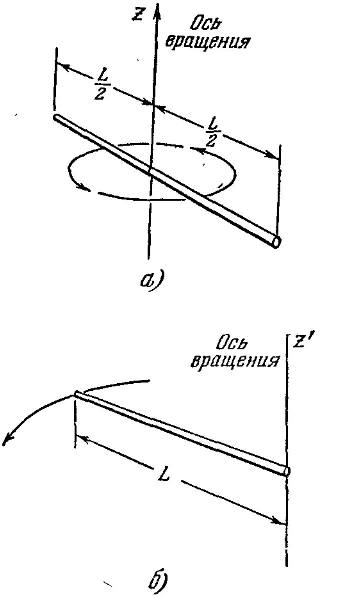

Рис. 8.18. *а*) Для тонкого твердого стержня $I_{zz}=2\int\limits_0^{L/2} x^2\left(\frac{M}{L}\right)dx$, где M — полная масса. Поэтому $I_{zz}=\frac{1}{12}ML^2$.

б) В этом случае $I_{z'z'}=\int\limits_0^{L} x^2\left(\frac{M}{L}\right)dx=\frac{1}{3}ML^2$; в то же время $\frac{1}{3}ML^2=\frac{1}{12}ML^2+M\left(\frac{L}{2}\right)^2$, что подтверждает теорему о параллельных осях.

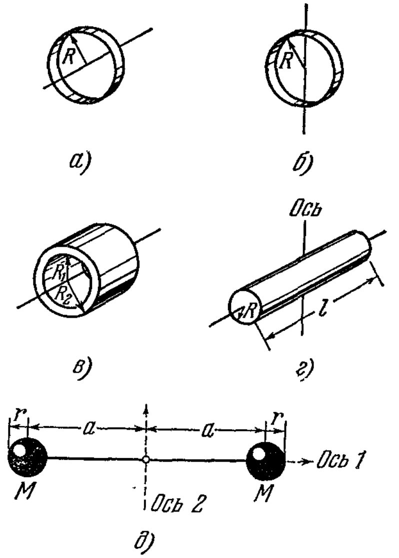

Рис. 8.19. Примеры моментов инерции относительно осей, указанных на рисунке. *а*) Тонкое кольцо: $I=MR^2$ (относительно оси цилиндра). *б*) Тонкое кольцо: $I=\frac{1}{2}MR^2$ (относительно любого диаметра). *в*) Кольцевой цилиндр: $I=\frac{1}{2}M\left(R_1^2+R_2^2\right)$ (относительно оси цилиндра). *г*) Твердый цилиндр (или диск): $I=\frac{1}{2}MR^2$ (относительно центрального диаметра). *д*) Два твердых шарика в виде гантели: $I_1=2\left(\frac{2}{5}Mr^2\right)$ (относительно оси 1); $I_2=2\left(Ma^2+\frac{2}{5}Mr^2\right)$ (относительно оси 2).

Так как MR^2 представляет собой момент инерции обруча (рис. 8.19, *а*) относительно оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной к его плоскости, то $2MR^2$ будет равен моменту инерции обруча относительно параллельной оси, проходящей через обод обруча.

Из (21) и (23) видно, что момент инерции однородного шара (рис. 8.20) относительно оси, касательной к его поверхности, равен

$$I_{xx}=\frac{2}{5}MR^2+MR^2=\frac{7}{5}MR^2. \qquad (24)$$

Правила суммирования. Соотношения (14), (15) и (16) могут быть записаны в очень краткой и компактной форме, если использовать тензорную символику записи, кратко изложенную в Математическом дополнении 2 к гл. 2. Повторим правила записи:

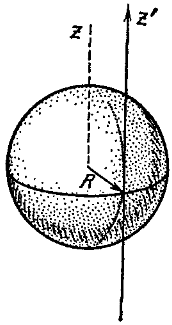

Рис. 8.20. Однородный шар: $I_{z'z'}$ относительно оси, касательной к поверхности:

$$I_{z'z'}=\frac{2}{5}MR^2+MR^2=\frac{7}{5}MR^2.$$

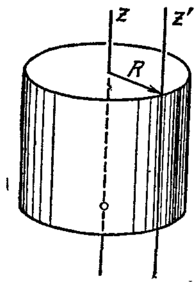

Рис. 8.21. Однородный цилиндр:

$$I_{zz}=\frac{1}{R^2}\,2\int_0^R Mr^3\,dr=\frac{1}{2}\,MR^2;$$

$$I_{z'z'}=MR^2+\frac{1}{2}MR^2=\frac{3}{2}MR^2.$$

1. Если индексы, обозначенные греческими буквами, в произведении встречаются дважды, то складываются члены для x, y и z, т. е.

$$I_{\mu\nu}\omega_\nu\equiv I_{\mu x}\omega_x+I_{\mu y}\omega_y+I_{\mu z}\omega_z. \qquad (25)$$

2. Если индекс в произведении не встречается дважды, то он может относиться к x, к y или к z. Так, уравнение

$$J_\mu=I_{\mu\nu}\omega_\nu \qquad (26)$$

эквивалентно системе уравнений (15). Сначала, например, мы можем вместо μ написать x, и тогда (26) будет иметь вид

$$J_x=I_{x\nu}\omega_\nu\equiv I_{xx}\omega_x+I_{xy}\omega_y+I_{xz}\omega_z. \qquad (27)$$

Гораздо короче написать (26), чем писать три уравнения (15).

3. Под x_μ мы можем подразумевать x, y или z. Если в произведении $x_\mu x_\nu$ индекс μ встречается дважды, то

$$x_\mu x_\mu=x^2+y^2+z^2=r^2. \qquad (28)$$

Если же в произведении $x_\mu x_\nu$ греческие индексы дважды не встречаются, то $x_\mu x_\nu$ должны писаться для xx, или для xy, или для yz и т. д. С помощью введенных обозначений выражению (16) можно придать следующий вид:

$$I_{\mu\nu}=\int \rho(\mathbf{r})(x_\alpha x_\alpha \delta_{\mu\nu}-x_\mu x_\nu)\,dV. \qquad (29)$$

Здесь $\delta_{\mu\nu}$— символ Кронекера; он не равен нулю только при $\mu=\nu$, когда он равен единице. Допустим, что мы имеем дело с I_{xx}; тогда член $x_\alpha x_\alpha \delta_{\mu\nu}$ в (29) представляет собой r^2, а член $x_\mu x_\nu$— просто x^2. Разумеется, вполне можно обойтись и без этого способа записи. Его следует применять для сокращения письма только в тех случаях, когда вы совершенно уверены в ваших действиях.

8.2. Кинетическая энергия вращательного движения

Кинетическая энергия твердого тела относительно покоящегося центра масс называется энергией вращательного движения тела. Эта энергия выражается следующим образом:

$$K=\frac{1}{2}\sum M_n v_n^2=\frac{1}{2}\sum M_n(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_n)^2=\frac{1}{2}\int\rho(\mathbf{r})(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_n)\,dV. \qquad (30)$$

Здесь $\mathbf{v}_n=(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_n)$ и $(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_n)\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_n)\equiv(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_n)^2$.

Рассмотрим сначала кинетическую энергию вращательного движения однородного шара. Пусть вектор $\boldsymbol{\omega}$ параллелен оси z. Тогда

$$(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})^2=\omega^2(x^2+y^2). \qquad (31)$$

Момент инерции однородного шара, плотность которого ρ, по формуле (16) равен

$$I=I_{zz}=\rho\int(x^2+y^2)\,dV. \qquad (32)$$

Поэтому из (30) получаем

$$K=\frac{1}{2}\rho\int(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})^2\,dV=\frac{1}{2}\rho\omega^2\int(x^2+y^2)\,dV=\frac{1}{2}I\omega^2. \qquad (33)$$

Перейдем теперь к выражению для кинетической энергии вращательного движения твердого тела произвольной формы:

$$K=\frac{1}{2}(\omega_x^2 I_{xx}+\omega_y^2 I_{yy}+\omega_z^2 I_z I_z+2\omega_x\omega_y I_{xy}+2\omega_y\omega_z I_{yz}+2\omega_z\omega_x I_{zx}. \qquad (34)$$

Используя векторное соотношение

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D})-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{D})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}), \qquad (35)$$

находим

$$(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})^2=\omega^2 r^2-(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r})^2. \qquad (36)$$

Сокращенно эта формула может быть записана в следующем виде *):

$$(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})^2=\omega_\mu\omega_\mu x_\nu x_\nu-\omega_\mu x_\mu\omega_\nu x_\nu=\omega_\mu\omega_\nu(x_\alpha x_\alpha\delta_{\mu\nu}-x_\mu x_\nu). \qquad (37)$$

*) На тот случай, если у вас есть какие-нибудь сомнения в том, как прочитать формулу (37), мы запишем ее в развернутом виде:

$$(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})^2=\left(\sum_\mu\omega_\mu^2\right)\left(\sum_\nu x_\nu^2\right)-\left(\sum_\mu\omega_\mu x_\mu\right)\left(\sum_\nu\omega_\nu x_\nu\right),$$

где μ и ν принимают значения x, y и z. Заметим, что $\sum_\nu x_\nu^2=r^2$.