можно придать следующий вид:

$$I_{\mu\nu}=\int \rho(\mathbf{r})(x_\alpha x_\alpha \delta_{\mu\nu}-x_\mu x_\nu)\,dV. \qquad (29)$$

Здесь $\delta_{\mu\nu}$ — символ Кронекера; он не равен нулю только при $\mu=\nu$, когда он равен единице. Допустим, что мы имеем дело с I_{xx}; тогда член $x_\alpha x_\alpha \delta_{\mu\nu}$ в (29) представляет собой r^2, а член $x_\mu x_\nu$ — просто x^2. Разумеется, вполне можно обойтись и без этого способа записи. Его следует применять для сокращения письма только в тех случаях, когда вы совершенно уверены в ваших действиях.

8.2. Кинетическая энергия вращательного движения

Кинетическая энергия твердого тела относительно покоящегося центра масс называется энергией вращательного движения тела. Эта энергия выражается следующим образом:

$$K=\frac{1}{2}\sum M_n v_n^2=\frac{1}{2}\sum M_n(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_n)^2=\frac{1}{2}\int \rho(\mathbf{r})(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_n)\,dV. \qquad (30)$$

Здесь $\mathbf{v}_n=(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_n)$ и $(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_n)\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_n)\equiv(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_n)^2$.

Рассмотрим сначала кинетическую энергию вращательного движения однородного шара. Пусть вектор $\boldsymbol{\omega}$ параллелен оси z. Тогда

$$(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})^2=\omega^2(x^2+y^2). \qquad (31)$$

Момент инерции однородного шара, плотность которого ρ, по формуле (16) равен

$$I=I_{zz}=\rho\int(x^2+y^2)\,dV. \qquad (32)$$

Поэтому из (30) получаем

$$K=\frac{1}{2}\rho\int(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})^2\,dV=\frac{1}{2}\rho\omega^2\int(x^2+y^2)\,dV=\frac{1}{2}I\omega^2. \qquad (33)$$

Перейдем теперь к выражению для кинетической энергии вращательного движения твердого тела произвольной формы:

$$K=\frac{1}{2}(\omega_x^2 I_{xx}+\omega_y^2 I_{yy}+\omega_z^2 I_z I_z+2\omega_x\omega_y I_{xy}+2\omega_y\omega_z I_{yz}+2\omega_z\omega_x I_{zx}. \qquad (34)$$

Используя векторное соотношение

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D})-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{D})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}), \qquad (35)$$

находим

$$(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})^2=\omega^2 r^2-(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r})^2. \qquad (36)$$

Сокращенно эта формула может быть записана в следующем виде *):

$$(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})^2=\omega_\mu\omega_\mu x_\nu x_\nu-\omega_\mu x_\mu\omega_\nu x_\nu=\omega_\mu\omega_\nu(x_\alpha x_\alpha\delta_{\mu\nu}-x_\mu x_\nu). \qquad (37)$$

*) На тот случай, если у вас есть какие-нибудь сомнения в том, как прочитать формулу (37), мы запишем ее в развернутом виде:

$$(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})^2=\left(\sum_\mu \omega_\mu^2\right)\left(\sum_\nu x_\nu^2\right)-\left(\sum_\mu \omega_\mu x_\mu\right)\left(\sum_\nu \omega_\nu x_\nu\right),$$

где μ и ν принимают значения x, y и z. Заметим, что $\sum_\nu x_\nu^2=r^2$.

[Это соотношение легко могло быть написано непосредственно, без применения формулы (36), если воспользоваться символом $\varepsilon_{\lambda\mu\nu}$, введенным в Математическом дополнении 2 к гл. 2.]

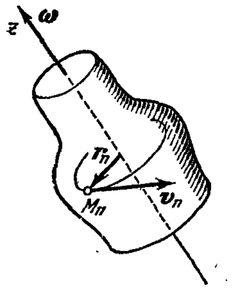

Рис. 8.22. Кинетическая энергия аксиально симметричного тела, вращающегося относительно оси симметрии, равна

$$K = \frac{1}{2} I_{zz} \omega^2.$$

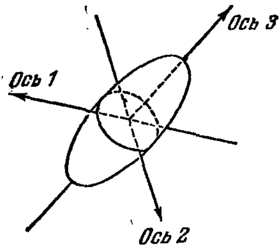

Рис. 8.23. Для *любого* твердого тела $K=\frac{1}{2} I_{\mu\nu}\omega_\mu\omega_\nu$. Поверхность $\frac{1}{2} I_{\mu\nu}\omega_\mu\omega_\nu=\mathrm{const}$ представляет собой эллипсоид в пространстве (ω_x, ω_y, ω_z). На рисунке указаны главные оси (1, 2, 3) эллипсоида.

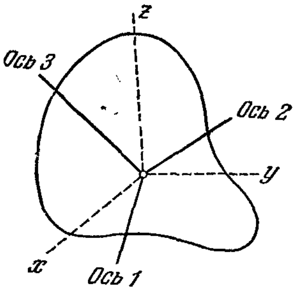

Рис. 8.24. Если мы повернем оси тела (x, y, z) соответствующим образом, то они совпадут с главными осями (1, 2, 3) эллипсоида. Отныне мы будем применять главные оси тела.

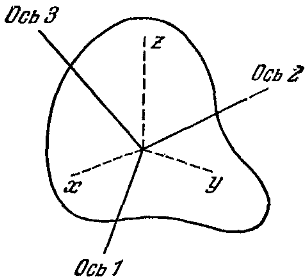

Рис. 8.25. Относительно главных осей 1, 2 и 3

$$K=\frac{1}{2} I_1\omega_1^2+\frac{1}{2} I_2\omega_2^2+\frac{1}{2} I_3\omega_3^2$$

и

$$\mathbf{J}=I_1\omega_1+I_2\omega_2+I_3\omega_3.$$

Эти выражения не содержат перекрестных членов!

В тех случаях, когда существо вопроса достигает приблизительно такой же степени сложности, как в рассматриваемом нами случае, использование сокращенного метода при суммировании произведений становится уже более целесообразным, чем применение обычной векторной символики.

Подставляя (37) в (30) и используя (29), получаем выражение для кинетической энергии:

$$K=\frac{1}{2}\omega_\mu\omega_\nu\int\rho(\mathbf{r})(x_\alpha x_\alpha\delta_{\mu\nu}-x_\mu x_\nu)dV=\frac{1}{2}I_{\mu\nu}\omega_\mu\omega_\nu, \tag{38}$$

что аналогично (34) *).

Для шара, у которого $I_{xx}=I_{yy}=I_{zz}$, соотношение (38) упрощается:

$$K=\frac{1}{2}I(\omega_\mu^2+\omega_y^2+\omega_z^2)=\frac{1}{2}I\omega^2, \tag{39}$$

в соответствии с (33). Инерциальные коэффициенты удобно использовать при описании как момента импульса, так и кинетической энергии вращательного движения твердого тела.

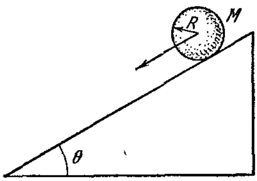

Рис. 8.26. Шар, скатывающийся с наклонной плоскости.

Пример. *Скатывающийся шар*. Шар радиусом R и массой M скатывается с наклонной плоскости длиной L, образующей угол θ с горизонтом (рис. 8.26). Какова скорость центра масс шара в конце наклонной плоскости?

Это стандартный тип задачи из задачника. Один из способов решения этой задачи состоит в том, что пишется выражение для потенциальной энергии шара на верхнем конце плоскости:

$$U=Mgh=MgL\sin\theta, \tag{40}$$

и приравнивается выражению для кинетической энергии на нижнем конце:

$$K=\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2, \tag{41}$$

равной сумме кинетических энергий поступательного и вращательного движений. Заметим, что оба члена в (41) совершенно независимы. Первый член выражает кинетическую энергию поступательного движения, связанную с перемещением центра масс; второй член выражает кинетическую энергию, связанную с вращением относительно центра масс. Интуитивно ясно, что эти члены независимы, так как шар может соскальзывать вниз без вращения, касаясь при этом плоскости в некоторой точке контакта, и может вращаться вокруг неподвижного центра масс. При движении шара по плоскости вниз возможна любая комбинация этих двух независимых движений.

Существует одна из комбинаций, которая во многих отношениях представляет особый интерес. Это качение без скольжения. Качение без скольжения — это такое движение, в котором точка

*) Следует заметить, что для твердого тела $J_\nu=\partial K/\partial\omega_\nu$. Это можно показать, сравнивая (26) и (38) или уравнения (15) и (34).

контакта тела с плоскостью в каждый данный момент времени находится в состоянии покоя. Это движение может быть также получено из условия, что скорость центра масс равна $R\omega$. Поэтому (41) можно переписать следующим образом:

$$K=\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}I\left(\frac{v}{R}\right)^2=\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}Mv^2=\frac{7}{10}Mv^2, \tag{42}$$

где мы воспользовались выражением для момента инерции однородного шара $I=\frac{2}{5}MR^2$. Приравнивая (40) и (42), находим выражение для квадрата скорости шара в нижнем конце плоскости:

$$v^2=\frac{10}{7}gL\sin\theta. \tag{43}$$

Другой путь решения этой задачи состоит в том, что катящееся тело можно рассматривать как тело, вращающееся в каждый данный момент времени вокруг точки контакта. Точка контакта катящегося тела всегда находится в покое. С этой точки зрения полная кинетическая энергия представляет собой кинетическую энергию вращательного движения вокруг точки контакта, при котором $I=\frac{7}{5}MR^2$, как это видно из формулы (24) для вращения вокруг оси, касательной к поверхности шара. Поэтому

$$K=\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{5}MR^2\omega^2=\frac{7}{10}Mv^2, \tag{44}$$

в согласии с формулой (42).

Главные оси. Вернемся к сложному общему выражению (34) для кинетической энергии вращательного движения. Это выражение, справедливое для произвольного расположения осей координат, всегда можно упростить и свести к трем членам. Хитрость состоит в выборе системы координат (для тел правильной формы это сделать очень просто). В такой удачно выбранной системе координат остаются только три диагональных коэффициента: $I_{xx}\equiv I_1$, $I_{yy}\equiv I_2$, $I_{zz}\equiv I_3$. Такие оси координат называются *главными осями.* Недиагональные коэффициенты обращаются в нуль, и кинетическая энергия вращательного движения становится равной

$$K=\frac{1}{2}I_1\omega_1^2+\frac{1}{2}I_2\omega_2^2+\frac{1}{2}I_3\omega_3^2. \tag{45}$$

(Для цилиндра главными осями являются ось цилиндра и две взаимно перпендикулярные оси, перпендикулярные в свою очередь к оси цилиндра.) Уравнения (15), связывающие векторы $\mathbf{J}$ и $\boldsymbol{\omega}$, принимают простой вид:

$$J_1=I_1\omega_1, \quad J_2=I_2\omega_2, \quad J_3=I_3\omega_3, \tag{46}$$

и соответственно изменяется формула (45) для кинетической энергии вращательного движения:

$$K=\frac{1}{2I_1}J_1^2+\frac{1}{2I_2}J_2^2+\frac{1}{2I_3}J_3^2. \tag{47}$$

Заметим, что вектор $\mathbf{J}$ параллелен вектору $\boldsymbol{\omega}$, если тело вращается относительно главной оси.

8.3. Уравнения Эйлера

Уравнение движения

$$\frac{d}{dt}\mathbf{J}=\mathbf{N} \tag{48}$$

справедливо для инерциальной системы отсчета. Инерциальные коэффициенты $I_{\mu\nu}$ удобнее всего определяются по отношению к координатным осям, покоящимся во вращающемся теле, с которым связана неинерциальная система отсчета (мы рассматриваем вопрос о том, являются ли оси покоящимися или нет). Из гл. 3 мы знаем, как преобразовать вектор из инерциальной системы отсчета во вращающуюся систему отсчета:

$$\left(\frac{d\mathbf{J}}{dt}\right)_{\text{ин}}=\frac{d\mathbf{J}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{J}, \tag{49}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость вращающейся системы отсчета. Все другие величины в правой части (49) относятся к вращающейся системе отсчета. Поэтому (48) принимает вид

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{J}=\mathbf{N}, \tag{50}$$

где $\mathbf{J}$ относится к вращающейся системе отсчета.

Предположим, что оси координат во вращающейся системе отсчета расположены вдоль главных осей 1, 2, 3. Принимая во внимание (46), мы можем написать для проекции на ось 1, вместо (50),

$$\left(\frac{dJ}{dt}\right)_1+(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{J})_1=\frac{dJ_1}{dt}+\omega_2J_3-\omega_3J_2=I_1\frac{d\omega_1}{dt}+\omega_2I_3\omega_3-\omega_3I_2\omega_2=N_1, \tag{51}$$

или, преобразуя (50), мы можем также написать уравнения для компонент вдоль осей 1, 2 и 3:

$$I_1\frac{d\omega_1}{dt}+(I_3-I_2)\,\omega_2\omega_3=N_1, \tag{52а}$$

$$I_2\frac{d\omega_2}{dt}+(I_1-I_3)\,\omega_1\omega_3=N_2, \tag{52б}$$

$$I_3\frac{d\omega_3}{dt}+(I_2-I_1)\,\omega_1\omega_2=N_3. \tag{52в}$$

Эти уравнения известны под названием *уравнений Эйлера*. Они являются исходными уравнениями при решении задач на вращение твердых тел. Следует всегда помнить, что при использовании уравнений Эйлера главные оси 1, 2 и 3 связаны с телом.