

энергии вращательного движения:

$$K = \frac{1}{2I_1} J_1^2 + \frac{1}{2I_2} J_2^2 + \frac{1}{2I_3} J_3^2. \quad (47)$$

Заметим, что вектор \mathbf{J} параллелен вектору $\boldsymbol{\omega}$, если тело вращается относительно главной оси.

8.3. Уравнения Эйлера

Уравнение движения

$$\frac{d}{dt} \mathbf{J} = \mathbf{N} \quad (48)$$

справедливо для инерциальной системы отсчета. Инерциальные коэффициенты $I_{\alpha\beta}$ удобнее всего определяются по отношению к координатным осям, покоящимся во вращающемся теле, с которым связана неинерциальная система отсчета (мы рассматриваем вопрос о том, являются ли оси покоящимися или нет). Из гл. 3 мы знаем, как преобразовать вектор из инерциальной системы отсчета во вращающуюся систему отсчета:

$$\left(\frac{d\mathbf{J}}{dt} \right)_{\text{ин}} = \frac{d\mathbf{J}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}, \quad (49)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость вращающейся системы отсчета. Все другие величины в правой части (49) относятся к вращающейся системе отсчета. Поэтому (48) принимает вид

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} = \mathbf{N}, \quad (50)$$

где \mathbf{J} относится к вращающейся системе отсчета.

Предположим, что оси координат во вращающейся системе отсчета расположены вдоль главных осей 1, 2, 3. Принимая во внимание (46), мы можем написать для проекции на ось 1, вместо (50),

$$\left(\frac{dJ}{dt} \right)_1 + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J})_1 = \frac{dJ_1}{dt} + \omega_2 J_3 - \omega_3 J_2 = I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + \omega_2 I_3 \omega_3 - \omega_3 I_2 \omega_2 = N_1, \quad (51)$$

или, преобразуя (50), мы можем также написать уравнения для компонент вдоль осей 1, 2 и 3:

$$I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 = N_1, \quad (52a)$$

$$I_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = N_2, \quad (52b)$$

$$I_3 \frac{d\omega_3}{dt} + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 = N_3. \quad (52b)$$

Эти уравнения известны под названием *уравнений Эйлера*. Они являются исходными уравнениями при решении задач на вращение твердых тел. Следует всегда помнить, что при использовании уравнений Эйлера главные оси 1, 2 и 3 связаны с телом.

Пример. Прецессия шара, на который не действует момент вращения. Для однородного шара, у которого $I_1 = I_2 = I_3$, уравнения Эйлера принимают вид

$$I\dot{\omega}_1 = N_1, \quad I\dot{\omega}_2 = N_2, \quad I\dot{\omega}_3 = N_3. \quad (53)$$

Для свободного движения $N=0$ и из (53) следует, что $\omega = \text{const}$. Вывод о том, что $\omega = \text{const}$, является характерным отличительным признаком свободно вращающегося шара.

Пример. Симметричный волчок. Для симметричного волчка $I_1 = I_2 \neq I_3$. Из (52) видно, что если не действует внешний момент вращения, то ω_3 (и только ω_3) постоянна. Уравнения (52а) и (52б) приобретают вид

$$\dot{\omega}_1 + \Omega\omega_2 = 0, \quad \dot{\omega}_2 - \Omega\omega_1 = 0, \quad (54)$$

где

$$\Omega \equiv \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3, \quad (55)$$

так как $I_1 = I_2$.

Решения уравнений (54) имеют вид

$$\omega_1 = A \cos \Omega t, \quad \omega_2 = A \sin \Omega t, \quad (56)$$

где A — постоянная величина. Мы видим, что компонента угловой скорости перпендикулярна к оси волчка (ось 3) и вращается с постоянной угловой скоростью Ω . Компонента ω_3 угловой скорости вдоль оси волчка постоянна. Поэтому вектор ω равномерно вращается с угловой скоростью Ω относительно оси волчка. Другими словами, волчок, вращающийся относительно своей геометрической оси с угловой скоростью ω_3 в пространстве, в котором не действуют силы, будет раскачиваться из стороны в сторону с частотой Ω , выражаемой формулой (55).

Для Земли I_3 не равно в точности I_1 , потому что Земля не является точным шаром. Колебания, описываемые уравнениями (56), очень хорошо наблюдаются на опыте, приводя к возникновению эффекта, называемого вариацией широты. Эти колебания представляют настолько большой интерес, что для их изучения Международная широтная служба организовала несколько обсерваторий. Одна из них находится в Юкиа в Северной Калифорнии. Из формулы (55) следует, что для Земли период равен 305 дням. Наблюдаемое движение имеет годичную компоненту (интерпретируемую как вынужденное колебание) и свободный период в 420 дней. Когда в конце девятнадцатого века Ньюкомб, исходя из деформации Земли под влиянием изменения направления центробежной силы, объяснил увеличение периода с 305 до 420 дней, это было подлинным триумфом и позволило получить первые данные о жесткости Земли.

Подробный рассказ об этом очень увлекателен. Свободная компонента движения кажется нам затухающей со временем затухания 30 лет или даже меньше и дает информацию о неупругих

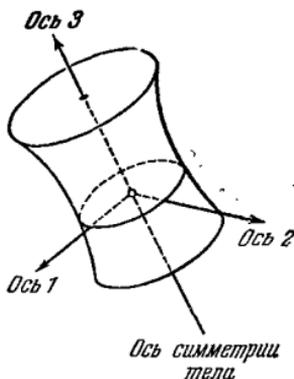


Рис. 8.27. Рассмотрим «свободное» вращение ($N=0$) тела, обладающего осью симметрии (например, осью 2). Тогда $I_1=I_2$ и $\omega_3=\text{const}$.

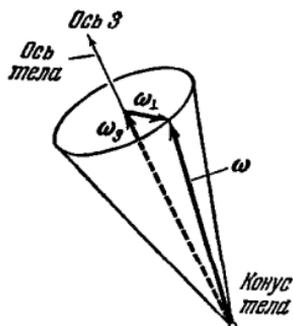


Рис. 8.28. При этих условиях $|\omega| = \text{const}$ (см. рис. 8.27). Вектор ω прецессирует с постоянной угловой скоростью вокруг оси симметрии тела.

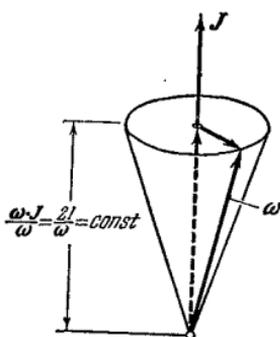


Рис. 8.29. Пространственный конус. В этом случае $N=0$. Вектор J имеет определенное направление в пространстве. Проекция вектора ω на направление вектора J постоянна

$$\left[K = \frac{1}{2} I_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 = \text{const} \right].$$

Поэтому ω прецессирует с постоянной скоростью вокруг вектора J .

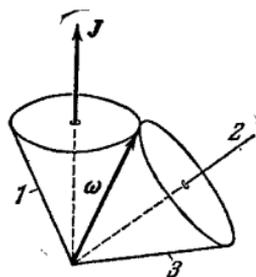


Рис. 8.30. Таким образом, в случае «свободного» вращения аксиально симметричного тела конус тела катится по пространственному конусу (без скольжения). 1 — пространственный конус; 2 — ось симметрии тела; 3 — конус тела.

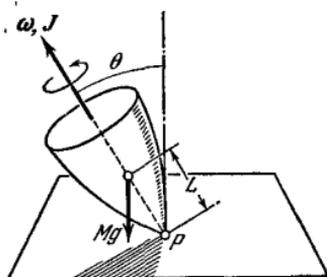


Рис. 8.31. Другая задача: симметричный волчок. В этом случае $|dJ/dt| = |N| = MgL \sin \theta \neq 0$. Если волчок вращается быстро, то ω и N приблизительно совпадают с осью тела.

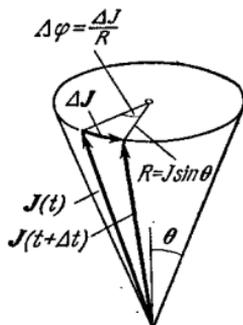


Рис. 8.32. Так как $N \perp J$, то $\Delta J = N \Delta t$ перпендикулярен J . Поэтому $|J| = \text{const}$, но J прецессирует вокруг вертикальной оси. Частота прецессии равна

$$\Omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{\Delta J}{\Delta t} \frac{1}{J \sin \theta} = \frac{MgL \sin \theta}{J \sin \theta} = \frac{MgL}{J}$$

характеристиках Земли. Однако до настоящего времени еще не дано удовлетворительного объяснения причин, поддерживающих это движение.

Уравнение (50) или уравнения Эйлера показывают нам, что компоненты угловой скорости и, следовательно, компоненты момента импульса (относительно осей, связанных с телом) не постоянны, даже когда момент равен нулю. Но если момент отсутствует, то величина угловой скорости постоянна:

$$J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = \text{const.} \quad (57)$$

Для того чтобы доказать этот результат, рассмотрим (50) при $\mathbf{N}=0$:

$$\dot{\mathbf{J}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}. \quad (58)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}) = 2\mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{J}} = -2\mathbf{J} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}) = 0, \quad (59)$$

так как $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}$ перпендикулярно к \mathbf{J} . Поэтому

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{J} = \text{const} = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2, \quad (60)$$

что и требовалось доказать.

8.4. Прецессия спина в постоянном магнитном поле

Будем называть спином момент импульса частицы относительно ее центра масс. Прецессия вектора момента импульса в магнитном поле представляет собой интересную задачу, имеющую важное значение для атомной физики, для физики твердого тела, для химии, биологии и геологии.

Сделаем два предположения:

1. Магнитный момент $\boldsymbol{\mu}$ элементарной частицы пропорционален моменту импульса \mathbf{J} :

$$\boldsymbol{\mu} = \gamma \mathbf{J}, \quad (61)$$

где γ — постоянная величина, называемая *гиромангнитным отношением*. Для свободного электрона

$$\gamma \cong \frac{e}{mc}.$$

2. Момент, испытываемый магнитным моментом в магнитном поле, равен $\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$. Этот результат будет выведен во втором томе, однако хорошо известно из опыта, что магнитное поле действует на магнит или на контур с током.

В лабораторной системе отсчета, исходя из соотношения $\dot{\mathbf{J}} = \mathbf{N}$, мы получаем уравнение

$$\dot{\mathbf{J}} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} = \gamma \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (62)$$

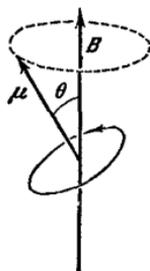


Рис. 8.33. Аналогичная задача: магнитный момент $\boldsymbol{\mu} = \gamma \mathbf{J}$ в магнитном поле, в котором момент $\mathbf{N} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$ перпендикулярен к \mathbf{J} . Частота прецессии равна $\omega = \gamma B$ и снова не зависит от θ .