характеристиках Земли. Однако до настоящего времени еще не дано удовлетворительного объяснения причин, поддерживающих это движение.

Уравнение (50) или уравнения Эйлера показывают нам, что компоненты угловой скорости и, следовательно, компоненты момента импульса (относительно осей, связанных с телом) не постоянны, даже когда момент равен нулю. Но если момент отсутствует, то величина угловой скорости постоянна:

$$J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = \text{const}. \tag{57}$$

Для того чтобы доказать этот результат, рассмотрим (50) при $\mathbf{N}=0$:

$$\dot{\mathbf{J}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}. \tag{58}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}) = 2\mathbf{J}\cdot\dot{\mathbf{J}} = -2\mathbf{J}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{J}) = 0, \tag{59}$$

так как $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{J}$ перпендикулярно к $\mathbf{J}$. Поэтому

$$\mathbf{J}\cdot\mathbf{J} = \text{const} = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2, \tag{60}$$

что и требовалось доказать.

8.4. Прецессия спина в постоянном магнитном поле

Будем называть спином момент импульса частицы относительно ее центра масс. Прецессия вектора момента импульса в магнитном поле представляет собой интересную задачу, имеющую важное значение для атомной физики, для физики твердого тела, для химии, биологии и геологии.

Сделаем два предположения:

1. Магнитный момент $\boldsymbol{\mu}$ элементарной частицы пропорционален моменту импульса $\mathbf{J}$:

$$\boldsymbol{\mu} = \gamma\mathbf{J}, \tag{61}$$

где γ — постоянная величина, называемая *гиромагнитным отношением*. Для свободного электрона

$$\gamma \cong \frac{e}{mc}.$$

2. Момент, испытываемый магнитным моментом в магнитном поле, равен $\boldsymbol{\mu}\times\mathbf{B}$. Этот результат будет выведен во втором томе, однако хорошо известно из опыта, что магнитное поле действует на магнит или на контур с током.

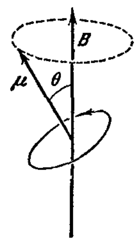

Рис. 8.33. Аналогичная задача: магнитный момент $\boldsymbol{\mu}=\gamma\mathbf{J}$ в магнитном поле, в котором момент $\mathbf{N}=\boldsymbol{\mu}\times\mathbf{B}$ перпендикулярен к $\mathbf{J}$. Частота прецессии равна $\omega=\gamma B$ и снова не зависит от θ.

В лабораторной системе отсчета, исходя из соотношения $\dot{\mathbf{J}}=\mathbf{N}$, мы получаем уравнение

$$\boxed{\dot{\mathbf{J}} = \boldsymbol{\mu}\times\mathbf{B} = \gamma\mathbf{J}\times\mathbf{B}.} \tag{62}$$

Теперь положим $\mathbf{B}=B\hat{\mathbf{z}}$, тогда (62) можно записать в виде

$$\dot{J}_x=\gamma J_y B, \quad \dot{J}_y=-\gamma J_x B, \quad \dot{J}_z=0. \tag{63}$$

Эти уравнения аналогичны (54). Решение системы (63) мы получим в следующей форме:

$$J_x=A\sin\Omega t, \quad J_y=A\cos\Omega t, \quad J_z=\text{const}, \tag{64}$$

где A — постоянная величина и

$$\Omega=\gamma B. \tag{65}$$

Величина Ω называется *частотой свободной прецессии*.

Спиновый резонанс. Рассмотрим теперь движение спина в магнитном поле, которое имеет постоянную компоненту B в направлении оси z и небольшую переменную компоненту H_1 в направлении оси x частоты ω. Сумма этих двух полей будет равна

$$\mathbf{B}=H_1\sin\omega t\cdot\hat{\mathbf{x}}+B\hat{\mathbf{z}}. \tag{66}$$

Три компоненты уравнения движения (62) имеют вид

$$\left.\begin{aligned}&\dot{J}_x=\Omega J_y, \quad \dot{J}_y=-\Omega J_x+\gamma J_z H_1\sin\omega t,\\&\dot{J}_z=-\gamma J_y H_1\sin\omega t.\end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Несмотря на то, что эти уравнения могут быть решены точно, удобно рассмотреть приближенное решение для случая $J_y \ll J_z$, когда спин образует малый угол с осью z. Тогда мы можем считать, что $\dot{J}_z \cong 0$, т. е. $J_z=\text{const}$. Решение для J_x и J_y, зависимость от времени которых та же, что и для вынуждающего поля (66), имеет вид

$$J_x=A\sin\omega t, \quad J_y=C\cos\omega t, \tag{68}$$

где A и C — постоянные величины. Синусоидальная и косинусоидальная зависимости вытекают из нашего представления о том, что $\mathbf{J}$ вращается вокруг оси z. Подставляя (68) в (67), получаем

$$\omega A\cos\omega t=\Omega C\cos\omega t-\omega C\sin\omega t=-\Omega A\sin\omega t+\gamma J H_1\sin\omega t. \tag{69}$$

Отсюда следует, что

$$\omega A=\Omega C, \quad -\omega C=-\Omega A+\gamma J H_1, \tag{70}$$

и, следовательно,

$$C=\frac{\gamma\omega J}{\omega^2-\Omega^2}H_1. \tag{71}$$

И, наконец, из (68) находим, что

$$J_x=\frac{\gamma\Omega J}{\omega^2-\Omega^2}H_1\sin\omega t, \quad J_y=\frac{\gamma\omega J}{\omega^2-\Omega^2}H_1\cos\omega t. \tag{72}$$

Из этих формул следует, что резонансиый максимум наступает при $\omega=\Omega\equiv\gamma B$. [Здесь не рассматриваются бесконечные и особые решения, получающиеся при точном решении уравнения (67), когда не пренебрегают величиной $\dot{J}_z$.] Мы видим, что при действии переменного магнитного поля в направлении оси x система реагирует как в направлении оси x, так и в направлении оси y.

Явления электронного и ядерного спинового резонанса широко используются в физике. Одно из наиболее важных приложений в ядерной физике состоит в определении гиромагнитного отношения $\gamma = M/J$ для различных ядер. Для этого определяют частоту и напряженность магнитного поля, при которых наблюдается резонанс. В этом случае

$$\omega = \gamma B. \tag{73}$$

8.5. Простой гироскоп

Рассмотрим движение в поле силы тяжести симметричного волчка, который (в рассматриваемом нами случае) вращается с угловой скоростью ω_3 вокруг горизонтальной оси. Ось волчка может поворачиваться вокруг некоторой точки практически без трения. Сила тяжести создает момент определенной величины N относительно этой точки. Направление $\mathbf{N}$ перпендикулярно к оси волчка и к вертикальной оси. В дальнейшем мы придем к поразительному выводу о том, что волчок будет устойчив в том случае, когда его ось расположена горизонтально. Нам нужно найти угловую скорость прецессии Ω, с которой ось медленно вращается вокруг вертикальной оси в горизонтальной плоскости. Сделаем упрощающее предположение, что ω_3 постоянна и не зависит от угловой скорости прецессии. Это вполне разумное приближение в том случае, когда волчок вращается очень быстро и частота прецессии невелика.

Пусть J равно $I_3\omega_3$; в соответствии с нашим допущением величина J постоянна. Момент N расположен в горизонтальной плоскости и перпендикулярен к оси волчка. Пусть, далее, угол φ измеряет поворот оси волчка в горизонтальной плоскости. Тогда $\mathbf{N} = N\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ и уравнение движения $\dot{\mathbf{J}} = \mathbf{N}$ мы напишем в форме

$$\dot{\mathbf{J}} = N\hat{\boldsymbol{\varphi}}. \tag{74}$$

Если, как мы предположили, величина J сохраняется постоянной, то решение уравнения (74) будет иметь вид

$$\dot{\mathbf{J}} = J\dot{\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} = J\Omega\hat{\boldsymbol{\varphi}}. \tag{75}$$

Здесь Ω — угловая скорость прецессии, с которой ось вращения гироскопа поворачивается относительно вертикальной оси. Комбинируя (74) и (75), получаем

$$\Omega = \frac{N}{J} = \frac{N}{I_3\omega_3}. \tag{76}$$

Свойство вращающегося твердого тела или гироскопа сохранять направление оси вращения особенно наглядно проявляется при сравнении его поведения с поведением невращающегося тела.