решения, получающиеся при точном решении уравнения (67), когда не пренебрегают величиной $\dot{J}_z$.] Мы видим, что при действии переменного магнитного поля в направлении оси $x$ система реагирует как в направлении оси $x$, так и в направлении оси $y$.

Явления электронного и ядерного спинового резонанса широко используются в физике. Одно из наиболее важных приложений в ядерной физике состоит в определении гиромагнитного отношения $\gamma = M/J$ для различных ядер. Для этого определяют частоту и напряженность магнитного поля, при которых наблюдается резонанс. В этом случае

$$\omega = \gamma B. \tag{73}$$

## 8.5. Простой гироскоп

Рассмотрим движение в поле силы тяжести симметричного волчка, который (в рассматриваемом нами случае) вращается с угловой скоростью $\omega_3$ вокруг горизонтальной оси. Ось волчка может поворачиваться вокруг некоторой точки практически без трения. Сила тяжести создает момент определенной величины $N$ относительно этой точки. Направление $\mathbf{N}$ перпендикулярно к оси волчка и к вертикальной оси. В дальнейшем мы придем к поразительному выводу о том, что волчок будет устойчив в том случае, когда его ось расположена горизонтально. Нам нужно найти угловую скорость прецессии $\Omega$, с которой ось медленно вращается вокруг вертикальной оси в горизонтальной плоскости. Сделаем упрощающее предположение, что $\omega_3$ постоянна и не зависит от угловой скорости прецессии. Это вполне разумное приближение в том случае, когда волчок вращается очень быстро и частота прецессии невелика.

Пусть $J$ равно $I_3\omega_3$; в соответствии с нашим допущением величина $J$ постоянна. Момент $N$ расположен в горизонтальной плоскости и перпендикулярен к оси волчка. Пусть, далее, угол $\varphi$ измеряет поворот оси волчка в горизонтальной плоскости. Тогда $\mathbf{N} = N\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ и уравнение движения $\dot{\mathbf{J}} = \mathbf{N}$ мы напишем в форме

$$\dot{\mathbf{J}} = N\hat{\boldsymbol{\varphi}}. \tag{74}$$

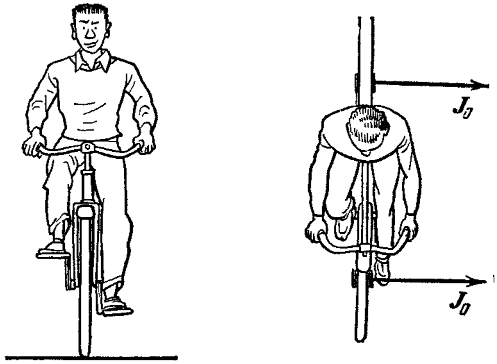
Если, как мы предположили, величина $J$ сохраняется постоянной, то решение уравнения (74) будет иметь вид

$$\dot{\mathbf{J}} = J\dot{\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} = J\Omega\hat{\boldsymbol{\varphi}}. \tag{75}$$

Здесь $\Omega$ — угловая скорость прецессии, с которой ось вращения гироскопа поворачивается относительно вертикальной оси. Комбинируя (74) и (75), получаем

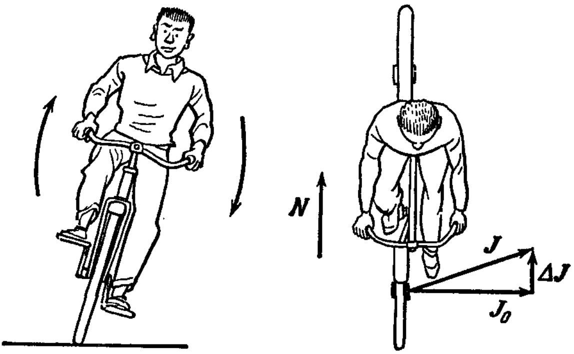
$$\Omega = \frac{N}{J} = \frac{N}{I_3\omega_3}. \tag{76}$$

Свойство вращающегося твердого тела или гироскопа сохранять направление оси вращения особенно наглядно проявляется при сравнении его поведения с поведением невращающегося тела.




а) б)

Рис. 8.34. Существует много примеров проявления гироскопического эффекта в обыденной жизни. *а*) На этом рисунке изображен студент, едущий на велосипеде прямо вперед. *б*) Вид сверху показывает направление моментов импульса, связанных с колесами.




а) б)

Рис. 8.35. *а*) Для того чтобы повернуть налево, велосипедист прикладывает момент, как это изображено на рисунке (наклоняясь налево). *б*) При этом момент направлен в сторону, противоположную направлению движения велосипеда, и так же должен быть направлен вектор $\Delta \mathbf{J}$. Новое направление вектора $\mathbf{J}$ показано на рисунке. Велосипед поворачивается налево.

Предположим, что оба тела, вращающееся и невращающееся, находятся в пространстве, в котором не действуют никакие силы. Пусть в течение короткого промежутка времени на оба тела действует небольшой момент. Тогда невращающееся тело под влиянием приложенного момента начнет вращаться, и это вращение будет происходить бесконечно и после того, как действие момента прекратится. Ось же гироскопа может лишь слегка отклоняться, пока действует момент, и перестает отклоняться после того, как действие момента прекращается. Такое поведение объясняется (это следует из $\dot{\mathbf{J}}=\mathbf{N}$) тем, что для постоянного изменения вектора момента импульса необходимо постоянное действие момента. Другими словами, малое изменение момента импульса $\Delta\mathbf{J}=\mathbf{N}\,\Delta t$ велико лишь по сравнению с нулем; это изменение представляет собой продолжительное вращение относительно неподвижной оси тела, первоначально невращавшегося. Но если перпендикулярно к первоначальному большому моменту импульса гироскопа $\mathbf{J}$ прибавить тот же вектор $\Delta\mathbf{J}$, то это вызовет отклонение оси гироскопа самое большее на угол $\Delta J/J$. В этом и состоит основное объяснение свойств гироскопа. Гироскоп широко применяется в инерциальных навигационных приборах.

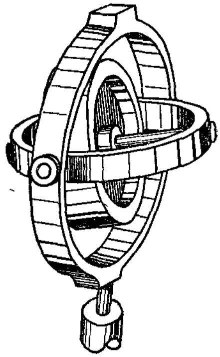


Рис. 8.36. Гироскоп на кардановом подвесе.

Гироскоп на кардановом подвесе (как это изображено на рис. 8.36) не испытывает действия момента в результате вращения Земли или в результате движения самолета, на котором он укреплен. Поэтому ось вращающегося тела всегда будет сохранять определенное направление в пространстве. Следует указать, что в гироскопах всегда применяются симметричные вращающиеся тела для того, чтобы ось вращения могла совпадать с направлением вектора момента импульса.

При использовании гирокомпасов применяются различные способы их крепления. Вращение Земли создает момент, действующий на вращающееся тело, за исключением случая, когда ось вращения тела направлена на север.

**Задачи**

1. *Вращающийся обруч.* Круглый металлический обруч массой $M=10^3$ *г* и радиусом $R=20$ *см* вращается относительно своего центра с угловой скоростью 10 *об/сек*; или $2\pi\cdot 10$ *рад/сек*. Ось вращения перпендикулярна к плоскости обруча.

а) Показать, что момент инерции относительно этой оси равен $4\cdot 10^5$ *г·см²*.

б) Показать, что момент импульса относительно той же оси равен $2{,}5 \times \times 10^7$ *эрг·сек*.

в) Требуется увеличить момент импульса относительно той же оси на $1\cdot 10^7$ *эрг·сек*. Если момент $N$ приложен в течение 10 *сек*, то показать, что его величина в этом случае должна быть равна $N=1\cdot 10^6$ *дин·см*.

г) Допустим, что этот момент осуществлялся силой, действующей тангенциально по отношению к ободу обруча; показать, что необходимая для этого сила равна $5\cdot 10^4$ *дин*.

**2.** *Велосипедное колесо.* а) Произведите разумную оценку порядка величины момента импульса велосипедного колеса (велосипедист взрослый), если скорость велосипедиста 30 *км/час* (прежде всего выразите скорость в *см/сек*).

Ответ. $10^8$ *г·см²/сек*.

б) Чему должен быть равен момент, который следует приложить к рулю для того, чтобы повернуть его со скоростью 1 *рад* в 0,1 *сек*?

Ответ. $\sim 10^9$ *г·см²/сек²*.

**3.** *Комптоновская длина волны.* Предположим, что электрон, масса которого $m \approx 1\cdot 10^{-27}$ *г*, движется по круговой орбите радиусом $R \approx 4\cdot 10^{-11}$ *см* (этот радиус приблизительно равен величине $h/(2\pi mc)$, или $\hbar/mc$, представляющей собой фундаментальную длину в атомной физике, известную под названием комптоновской длины волны). С какой скоростью (в *см/сек*) должен двигаться электрон чтобы обладать наблюденным значением момента импульса, который равен $^1/_2\hbar \approx {}^1/_2\cdot 10^{-27}$ *эрг·сек*? Здесь $\hbar$ представляет собой постоянную Планка, деленную на $2\pi$. Эту задачу удобно решать в общем виде, начиная с выражения для момента импульса $mR^2\omega = {}^1/_2\hbar$ и затем находя $v = R\omega = \hbar/2mR$.

Ответ. $1{,}5\cdot 10^{10}$ *см/сек*.

**4.** *Момент инерции гантели.* На каждом конце легкого стержня длиной $L = 200$ *см* расположено по одинаковой массе, равной $1\cdot 10^3$ *г*. Считая, что массы можно принять за материальные точки, рассмотрите следующие вопросы:

а) Где расположен центр масс этой системы?

б) Чему равен момент инерции относительно оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через центр масс?

в) Предположим, что стержень расположен в плоскости $xy$ прямоугольной системы координат и образует с осью $x$ угол в 45°. Определите инерциальные коэффициенты $I_{xx}$, $I_{yy}$, $I_{zz}$ относительно начала, расположенного в центре стержня.

г) Определите $I_{xy}$, $I_{xz}$, $I_{yz}$ для той же самой геометрии.

**5.** *Момент инерции однородного стержня.* Вычислите момент инерции тонкого однородного стержня массой $M$ и длиной $L$:

а) Относительно оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его центр масс.

б) Относительно оси, перпендикулярной к его оси и проходящей через один из его концов.

**6.** *Момент инерции цилиндра.* Покажите, что момент инерции однородного твердого круглого цилиндра (или диска) длиной $L$, радиусом $R$ и массой $M$ равен $I = {}^1/_2\, MR^2$, если он вычислен относительно его продольной оси. (Указание: сначала найдите момент инерции тонкого цилиндрического слоя плотностью $\rho$, радиусом $r$ и толщиной $\Delta r$. Для твердого цилиндра полученный результат нужно интегрировать.)

**7.** *Скатывающийся цилиндр.* Чему равно отношение кинетических энергий вращательного и поступательного движения твердого цилиндра, скатывающегося с наклонной плоскости без скольжения?

Ответ. 1/2.

**8.** *Скатывающийся цилиндр.* Твердый цилиндр массой $M$ скатывается без скольжения по плоскости длиной $L$, наклоненной под углом $\theta$ к горизонту (трением пренебречь).

а) Чему равна скорость центра масс цилиндра в нижней части плоскости?
Ответ.

$$(2\sqrt{3})\,(gL\sin\theta)^{1/2}.$$

б) Чему равна конечная скорость цилиндра, если он соскальзывает по плоскости (без вращения)?

**9.** *Правило суммирования.* При решении следующих задач используйте Математическое дополнение 2 к гл. 2, а также параграф, посвященный правилу суммирования, приведенный в гл. 8.

а) Используя единичный вектор $\hat{\mathbf{e}}_\mu$, выразите в компактной форме векторы **A** и **B** через их компоненты.

б) Раскройте двойную сумму $\delta_{\mu\nu}A_\mu A_\nu$, подробно выписав каждый член суммы. Покажите, как упростится эта сумма для случая $A_\mu A_\mu$.

в) Воспользовавшись результатами, полученными в а) и б), а также свойствами единичного вектора, покажите, что $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=A_\mu B_\mu$. Используйте символ Кронекера и правило суммирования.

г) Используя символ $\varepsilon_{\mu\nu\lambda}$ и правило суммирования, выразите $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ через компоненты **A** и **B**.

Ответ. $\varepsilon_{\mu\nu\lambda} A_\nu B_\lambda \hat{\mathbf{e}}_\mu$.

**10.** *Гироскопическая стабилизация.* Корабль массой $10^7$ *кг* гироскопически стабилизируется однородным круглым диском массой $5\cdot 10^4$ *кг* и радиусом 2 *м*, который вращается с угловой скоростью 15 *об/сек*.

а) Чему равен момент импульса стабилизатора?

Ширина корабля 20 *м*; мы можем считать, что эффективный радиус поперечного сечения корабля равен 10 *м*. Время свободного поворота при крене (считая крен от $-20°$ до $+20°$) составляет 12 *сек*.

б) Оцените величину момента импульса корабля при таком крене.

в) Каким путем гироскопический стабилизатор может помочь уменьшить угол крена?

**11.** *Вращение молекулы дезоксирибонуклеиновой кислоты.* Молекулярный вес дезоксирибонуклеиновой кислоты из бактериофага *T*2 составляет $1{,}2\cdot 10^8$. Молекула этой кислоты представляет собой двойную спираль, в которой содержится $1{,}2\cdot 10^4$ витков. Радиус витка спирали равен 6,7 Å.

а) Чему равен момент инерции относительно оси спирали?

Ответ. $I\approx 5\cdot 10^{-31}$ *г·см²*.

*б) Если кинетическую энергию вращательного движения* $^1/_2 I\omega^2$ *относительно* оси спирали приравнять кинетической энергии теплового движения $^1/_2 kT$ при 300° K, то чему окажется равна угловая частота $\omega$ вращательного движения?

Ответ. $3\cdot 10^8$ *рад/сек*.

в) Если двойную спираль «развинчивать» со скоростью $3\cdot 10^8$ *рад/сек* на две отдельные спирали, то сколько на это понадобится времени? (В действительности этот процесс «развинчивания» в растворах происходит совершенно случайно под влиянием бомбардировок молекулами воды спиралей; поэтому то время, которое вы вычислите, будет давать лишь порядок нижнего предела времени «развинчивания».)