ГЛАВА 9

СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ ПО ЗАКОНУ ОБРАТНЫХ КВАДРАТОВ

Величина электростатической или гравитационной силы, действующей между двумя неподвижными материальными точками, определяется следующим уравнением:

$$F=\frac{C}{r^2}, \tag{1а}$$

где C — постоянная. Такие силы называются центральными силами, действующими по закону обратных квадратов. Слово *центральная* означает, что сила направлена вдоль линии, соединяющей обе материальные точки. Если одна из материальных точек находится в начале координат, а другая — в положении $\mathbf{r}$, то сила, действующая на вторую материальную точку со стороны первой, равна

$$\mathbf{F}=\frac{C}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}. \tag{1б}$$

Для силы всемирного тяготения, действующей между двумя материальными точками с массами M_1 и M_2,

$$C=-GM_1M_2, \quad G=6{,}67\cdot 10^{-8}\ см/г\cdot сек^2, \tag{2}$$

а для электростатической силы, действующей между точечными зарядами q_1 и q_2,

$$C=q_1q_2 \tag{3}$$

при условии, что величина заряда выражается в единицах гауссовой системы СГСЭ (см. гл. 4). Сила тяготения (гравитационная сила) всегда имеет характер притяжения. Электростатическая (кулоновская) сила является силой притяжения, если заряды q_1 и q_2 имеют противоположные знаки, и силой отталкивания, если q_1 и q_2 имеют одинаковые знаки.

На основании очень точных измерений установлено, что показатель степени при r в уравнении (1а) равен 2,000...; для электростатических сил это проверено вплоть до расстояний порядка 10^{-13} *см*. Имеется большое число результатов измерений, выполненных настолько точно, что они позволили бы обнаружить даже небольшие отклонения от закона обратных квадратов. Основные данные этих измерений излагаются в т. II в связи с обсуждением электростатических сил. В качестве экспериментального подтверждения справедливости закона обратных квадратов для сил тяготения можно прежде всего указать на превосходное соответствие между результатами наблюдения за движением планет в Солнечной системе и расчетами их движения на основании этого закона.

Закон обратных квадратов, определяющий величину центральной силы, может быть также выражен в виде соотношения, согласно которому потенциальная энергия обратно пропорциональна первой степени расстояния. Как мы видели в гл. 5, абсолютная величина силы F равна $-\partial U/\partial r$. Тогда, согласно уравнению (1а),

$$F = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{C}{r^2} \tag{4а}$$

и

$$U(r) = \frac{C}{r} + \text{const}. \tag{4б}$$

Если мы выберем постоянную так, чтобы потенциальная энергия обращалась в нуль, когда материальные точки бесконечно удалены одна от другой, то получим

$$U(r) = \frac{C}{r}, \tag{4в}$$

где величина C для сил тяготения или электростатических сил определяется соответственно уравнениями (2) или (3). Таким образом,

$$U(r) = -\frac{GM_1M_2}{r} \quad \text{или} \quad U(r) = \frac{q_1q_2}{r}. \tag{4г}$$

Из опытов по рассеянию элементарных частиц известно, что на малых расстояниях (во много раз меньших, чем размеры атома) закон притяжения между двумя нуклонами (протонами или нейтронами) сильно отличается от закона Кулона, согласно которому потенциальная энергия взаимодействия двух частиц равна e^2/r. Существуют особые ядерные силы притяжения, которым соответствует приблизительно такая зависимость потенциальной энергии от расстояния между частицами:

$$U_{\text{яд}}(r) = -D\,\frac{e^{-r/r_0}}{r}, \tag{5}$$

где r_0 — постоянная, имеющая размерность длины; $r_0 \sim 2 \cdot 10^{-13}$ *см* (рис. 9.1). Постоянная D имеет порядок величины 10^{-18} *эрг·см*. Кроме того, между двумя протонами (поскольку они заряжены) действует сила кулоновского отталкивания, но при $r \leqslant r_0$ преобладающим видом взаимодействия является ядерное взаимодействие. Заметим, что порядок величины энергии ядерного взаимодействия определяется экспоненциальным множителем в уравнении (5). На расстоянии $2 \cdot 10^{-10}$ *см*, которое в 10^3 раз больше r_0, отношение потенциальной энергии ядерного взаимодействия (5) к электростатической потенциальной энергии e^2/r составляет $(D/e^2)\exp(10^{-3}) \approx \approx 10^{-400}$, т. е. оно ничтожно мало. Для сил взаимодействия между двумя электронами закон Кулона точно выполняется вплоть до самых малых известных нам расстояний между электронами. Однако электроны, помимо заряда, имеют магнитный момент, а сила взаимодействия магнитных моментов двух электронов является нецентральной и ее величина обратно пропорциональна кубу расстояния (см. т. II).

Рис. 9.1. Потенциал сил гравитационного притяжения, как и потенциал сил электростатического притяжения, пропорционален величине $1/r$. При больших расстояниях эта функция убывает с увеличением расстояния относительно медленно; таким образом, сила, действующая по закону обратных квадратов, является силой «дальнего порядка» (дальнодействия). Потенциал ядерных сил притяжения пропорционален величине $-e^{-r/r_0}/r$ и на больших расстояниях быстро совпадает до нуля.

Если известно, что величина силы обратно пропорциональна квадрату расстояния, то какие особые заключения следуют из этого? Какие принципиальные свойства Вселенной являются следствиями закона обратных квадратов? Займемся теперь этими важными вопросами. Мы будем чаще иметь дело с величиной потенциальной энергии, а не силы. *При решении задач на определение потенциальной энергии или силы студенту почти всегда легче сначала получить ответ для потенциальной энергии*, а затем рассчитать величину силы или ее составляющих, дифференцируя по расстоянию, как это показано в гл. 5. Потенциальная энергия — скаляр, сила — вектор. Проще сначала найти один скаляр, чем три составляющих вектора.

9.1. Сила взаимодействия между материальной точкой и тонким шаровым слоем

Из закона обратных квадратов можно вывести важное следствие: сила, действующая на материальную точку с массой M_1 (пробную массу), находящуюся на расстоянии r от центра однородного тонкого шарового слоя радиусом R, имеет при $r > R$ (т. е. если эта материальная точка находится вне шара) такую величину и направление, как если бы вся масса слоя была сконцентрирована в его центре. Второе следствие: сила, действующая на материальную точку, находящуюся внутри слоя, т. е. при $r < R$, равна нулю. Эти следствия настолько важны, что мы дадим их вывод со всеми подробностями. Мы применим специальный метод решения, в котором используется геометрическая симметрия условий задачи.

Сначала выделим из слоя кольцо, имеющее угловую ширину $\Delta\theta$ или линейную ширину $R\,\Delta\theta$, как показано на рис. 9.2 и 9.3. Пусть σ — масса, приходящаяся на единицу площади поверхности слоя. Все это кольцо находится на расстоянии r_1 от пробной массы M_1.

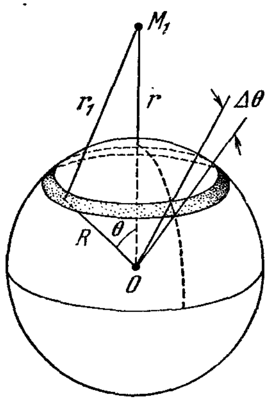

Рис. 9.2. Перспективный чертеж, показывающий, как шаровой слой разделяется на кольца. M_1 – материальная точка, являющаяся пробной массой. Масса единицы поверхности шарового слоя равна σ.

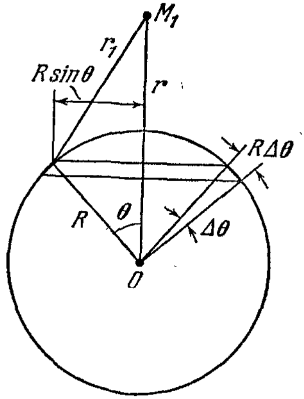

Рис. 9.3. Чертеж, показывающий в разрезе тот же шар (см. рис. 9.2) и выделенное на его поверхности кольцо с площадью $2\pi R^2 \sin\theta\,\Delta\theta$.

Радиус кольца равен $R\sin\theta$, а длина его окружности равна $2\pi R\sin\theta$. Таким образом, площадь кольца равна

$$(2\pi R\sin\theta)(R\,\Delta\theta) = 2\pi R^2 \sin\theta\,\Delta\theta. \tag{6}$$

Произведение всей площади кольца на массу σ, приходящуюся на единицу площади, дает массу кольца:

$$M_\text{к} = (2\pi R^2 \sin\theta\,\Delta\theta)\,\sigma. \tag{7}$$

Потенциальная энергия $U_\text{к}$ пробной массы в гравитационном поле этого кольца определяется согласно уравнению (7) и соотношению $U = -GM_1M_\text{к}/r_1$ для потенциальной энергии сил тяготения между двумя массами:

$$U_\text{к} = -\frac{GM_1\,(2\pi R^2 \sin\theta\,\Delta\theta)\,\sigma}{r_1}, \tag{8}$$

где r_1— расстояние от пробной массы до поверхности кольца.

Все элементы кольца находятся на одинаковом расстоянии от пробной массы. Применяя к треугольнику, образованному отрезками R, r и r_1, теорему косинусов [уравнение (35) на стр. 56], получим

$$r_1^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta. \tag{9}$$

Величины R и r постоянны для любого кольца, потому что R — это радиус слоя, а r — расстояние от центра слоя до пробной массы M_1. При этих условиях почленное дифференцирование уравнения (9) дает следующий результат:

$$2r_1\,dr_1 = -2rR\,d(\cos\theta) = 2rR\sin\theta\,d\theta. \qquad (10)$$

С помощью полученного соотношения можно преобразовать уравнение (8):

$$U_{\text{к}} = \frac{-GM_1\,(2\pi R\,\Delta r_1)\,\sigma}{r}. \qquad (11)$$

Отметим, что знаменатель правой части представляет собой расстояние от пробной массы до центра шарового слоя.

Теперь можно представить суммарную потенциальную энергию $U_{\text{сл}}$ пробной массы в гравитационном поле шарового слоя как сумму слагаемых $U_{\text{к}}$ для всех колец, которые в совокупности образуют этот слой. При суммировании складываются только величины Δr_1. Для случая, когда пробная масса находится вне слоя, величина r_1 изменяется от $(r-R)$ до $(r+R)$ так, что

$$\sum \Delta r_1 = (r+R)-(r-R) = 2R. \qquad (12)$$

Таким образом, решение всей задачи можно свести к простому суммированию. Используя соотношение (12), чтобы просуммировать слагаемые (11), получаем

$$U_{\text{сл}} = \sum U_{\text{к}} = -\frac{GM_1\,2\pi R\sigma}{r}\sum \Delta r_1 = -\frac{GM_1\cdot 4\pi R^2\sigma}{r}. \qquad (13)$$

Но $4\pi R^2$ — это площадь поверхности слоя, а $4\pi R^2\sigma$ — его масса $M_{\text{сл}}$. Поэтому можно переписать уравнение (13) в таком виде:

$$U_{\text{сл}} = -\frac{GM_1M_{\text{сл}}}{r} \qquad (r > R), \qquad (14)$$

где r — расстояние между пробной массой и центром шарового слоя. Мы показали, что *шаровой слой оказывает такое действие на находящиеся вне его материальные точки, как если бы вся его масса $M_{\text{сл}}$ находилась в центре шара.*

Если пробная масса находится где-то внутри шара, то пределы суммирования Δr_1 в $\sum U_{\text{к}}$ изменяются от $(R-r)$ до $(R+r)$, так что в этом случае

$$\sum \Delta r_1 = (R+r)-(R-r) = 2r. \qquad (15)$$

Используя теперь формулу (15), чтобы просуммировать слагаемые (11), получим

$$U_{\text{сл}} = \sum U_{\text{к}} = -\frac{GM_1\cdot 2\pi R\sigma}{r}\sum \Delta r_1 =$$
$$= -GM_1\cdot 4\pi R\sigma = -\frac{GM_1\cdot 4\pi R^2\sigma}{R} = -\frac{GM_1M_{\text{сл}}}{R} \qquad (r < R). \qquad (16)$$

Как следует из уравнения (16), во всех точках внутри слоя потенциальная энергия постоянна и равна $U_{сл}$, т. е. величине, которая может быть получена из уравнения (14) при $r=R$ (рис. 9.4).

Выше было указано, что величина силы F, действующей на пробную массу, равна $-\partial U/\partial r$, потому что эта сила действует в радиальном направлении. Из уравнений (14) и (16) получаем следующие соотношения для определения силы, действующей на материальную точку с массой M со стороны слоя:

$$F=-\frac{\partial U}{\partial r}=\begin{cases} -\dfrac{GM_1M_{сл}}{r^2} & (r>R), \\ 0 & (r<R). \end{cases} \tag{17}$$

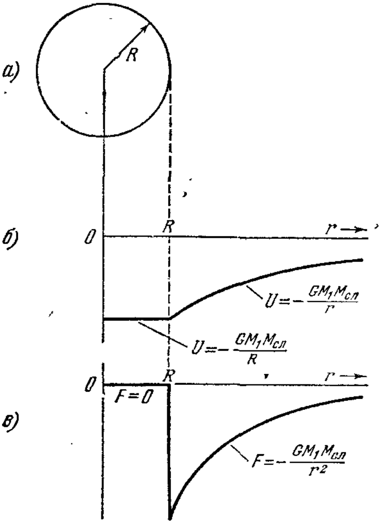

Рис. 9.4. *а*) Слой радиусом R и массой $M_{сл}$. *б*) Потенциальная энергия материальной точки M_1, находящейся на расстоянии r от центра слоя радиусом R и массой $M_{сл}$. *в*) Сила, действующая на материальную точку M_1 (знак минус означает притяжение). При $r<R$ эта сила равна нулю.

Таким образом, на находящуюся внутри слоя пробную массу не действует никакая сила. Это свойство характерно только для сил, подчиняющихся закону обратных квадратов. Вне слоя сила изменяется пропорционально $1/r^2$, причем r отсчитывается от центра слоя.

9.2. Сила взаимодействия между материальной точкой и сплошным шаром

Непрерывно накладывая концентрические шаровые слои друг на друга, можно образовать сплошной шар, имеющий массу M и радиус R_0. Пользуясь уравнением (14), мы получим для точек, находящихся вне шара, следующую формулу, определяющую потенциальную энергию пробной массы в поле тяготения сплошного шара:

$$U_{ш}=\sum U_{сл}=-\frac{GM_1}{r}\sum M_{сл}=-\frac{GM_1M}{r}. \tag{18}$$

Напомним, что r — это расстояние пробной массы от центра шара (рис. 9.5). Величина силы, действующей на материальную точку с массой M_1 при $r>R_0$, равна

$$\boxed{F=-\frac{\partial U}{\partial r}-\frac{GM_1M}{r^2}.} \tag{19}$$

Этот основной результат можно было бы получить также и непосредственным интегрированием элементов силы по поверхности шарового слоя, но наш путь решения математически более краток.