

циальная энергия постоянна и равна $U_{\text{сл}}$, т. е. величине, которая может быть получена из уравнения (14) при $r=R$ (рис. 9.4).

Выше было указано, что величина силы F , действующей на пробную массу, равна $-\partial U/\partial r$, потому что эта сила действует в радиальном направлении. Из уравнений (14) и (16) получаем следующие соотношения для определения силы, действующей на материальную точку с массой M со стороны слоя:

$$F = -\frac{\partial U}{\partial r} = \begin{cases} -\frac{GM_1 M_{\text{сл}}}{r^2} & (r > R), \\ 0 & (r < R). \end{cases} \quad (17)$$

Таким образом, на находящуюся внутри слоя пробную массу не действует никакая сила. Это свойство характерно только для сил, подчиняющихся закону обратных квадратов. Вне слоя сила изменяется пропорционально $1/r^2$, причем r отсчитывается от центра слоя.

9.2. Сила взаимодействия между материальной точкой и сплошным шаром

Непрерывно накладывая концентрические шаровые слои друг на друга, можно образовать сплошной шар, имеющий массу M и радиус R_0 . Пользуясь уравнением (14), мы получим для точек, находящихся вне шара, следующую формулу, определяющую потенциальную энергию пробной массы в поле тяготения сплошного шара:

$$U_{\text{ш}} = \sum U_{\text{сл}} = -\frac{GM_1}{r} \sum M_{\text{сл}} = -\frac{GM_1 M}{r}. \quad (18)$$

Напомним, что r — это расстояние пробной массы от центра шара (рис. 9.5). Величина силы, действующей на материальную точку с массой M_1 при $r > R_0$, равна

$$F = -\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{GM_1 M}{r^2}. \quad (19)$$

Этот основной результат можно было бы получить также и непосредственным интегрированием элементов силы по поверхности шарового слоя, но наш путь решения математически более краток.

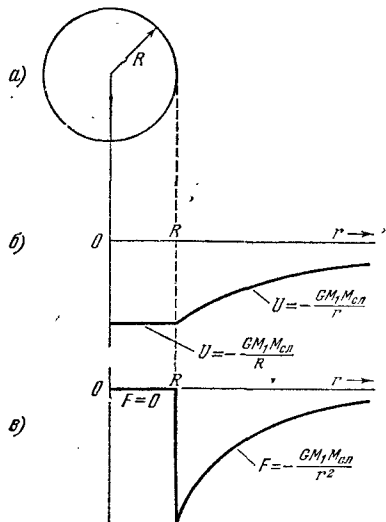


Рис. 9.4. а) Слой радиусом R и массой $M_{\text{сл}}$. б) Потенциальная энергия материальной точки M_1 , находящейся на расстоянии r от центра слоя радиусом R и массой $M_{\text{сл}}$. в) Сила, действующая на материальную точку M_1 (знак минус означает притяжение). При $r < R$ эта сила равна нулю.

Обобщая уравнение (19), легко можно убедиться, что сила взаимодействия между двумя однородными шарами с массами M_1 и M_2 равна силе взаимодействия между двумя материальными точками с массами M_1 и M_2 , находящимися в центрах соответствующих шаров. Заменяв один шар материальной точкой, мы можем затем заменить материальной точкой и второй шар. Этот вывод следует считать большой удачей, так как он позволяет упростить многие расчеты.

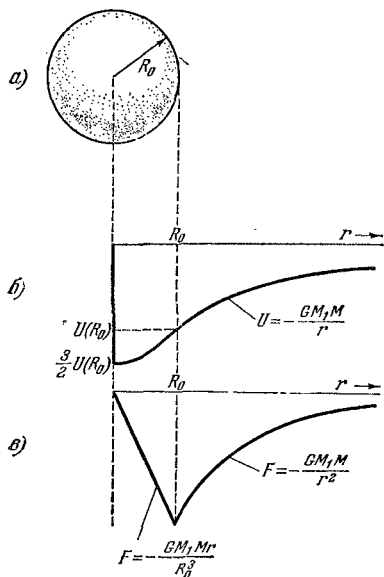


Рис. 9.5. а) Однородный сплошной шар радиусом R_0 и массой M . б) Потенциальная энергия материальной точки M_1 , находящейся на расстоянии r от центра сплошного шара радиусом R_0 и массой M_0 . в) Сила, действующая на материальную точку M . При $r < R_0$ эта сила пропорциональна r .

9.3. Собственная гравитационная и электростатическая энергия

По определению собственная энергия системы равна работе, которую нужно произвести, чтобы образовать эту систему из бесконечно малых элементов, первоначально находившихся на бесконечно больших расстояниях друг от друга. Рассмотрим собственную энергию сил тяготения — гравитационную энергию; она всегда отрицательна, потому что силы тяготения являются силами притяжения и нужно произвести положительную работу против них, чтобы разделить, например, атомы, входящие в состав звезды, удалив каждый атом в бесконечность. Собственная гравитационная энергия обычно определяется при решении

задач небесной механики, относящихся к звездам и галактикам. Расчеты собственной электростатической энергии часто производятся в теории кристаллов — как диэлектриков, так и металлов.

Потенциальная энергия системы из N отдельных атомов, обусловленная их взаимным притяжением под действием гравитационных сил, равна сумме потенциальных энергий всех пар атомов (рис. 9.6):

$$U = -G \sum_{\substack{\text{по всем} \\ \text{парам} \\ i \neq j}} \frac{M_i M_j}{r_{ij}} = -G \sum_{i > j}^N \sum_{j=1}^N \frac{M_i M_j}{r_{ij}}. \quad (20)$$

Мы даем это выражение в двух видах. В том виде, как оно написано посередине строки, мы указываем, что надо выполнить суммирование по всем парам атомов с индексами i и j , за исключе-