Обобщая уравнение (19), легко можно убедиться, что сила взаимодействия между двумя однородными шарами с массами M_1 и M_2 равна силе взаимодействия между двумя материальными точками с массами M_1 и M_2, находящимися в центрах соответствующих шаров. Заменив один шар материальной точкой, мы можем затем заменить материальной точкой и второй шар. Этот вывод следует считать большой удачей, так как он позволяет упростить многие расчеты.

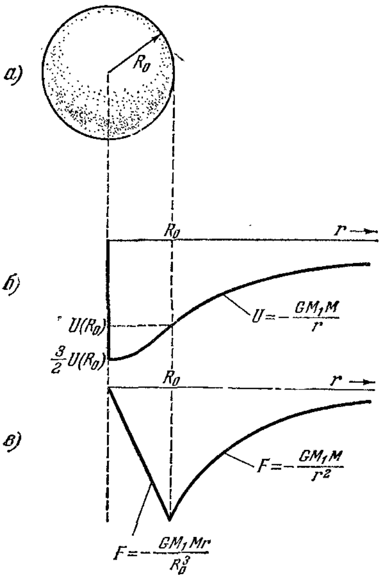

Рис. 9.5. *а*) Однородный сплошной шар радиусом R_0 и массой M. *б*) Потенциальная энергия материальной точки M_1, находящейся на расстоянии r от центра сплошного шара радиусом R_0 и массой M_0. *в*) Сила, действующая на материальную точку M. При $r < R_0$ эта сила пропорциональна r.

9.3. Собственная гравитационная и электростатическая энергия

По определению собственная энергия системы равна работе, которую нужно произвести, чтобы образовать эту систему из бесконечно малых элементов, первоначально находившихся на бесконечно больших расстояниях друг от друга. Рассмотрим собственную энергию сил тяготения — гравитационную энергию; она всегда отрицательна, потому что силы тяготения являются силами притяжения и нужно произвести положительную работу против них, чтобы разделить, например, атомы, входящие в состав звезды, удалив каждый атом в бесконечность. Собственная гравитационная энергия обычно определяется при решении задач небесной механики, относящихся к звездам и галактикам. Расчеты собственной электростатической энергии часто производятся в теории кристаллов — как диэлектриков, так и металлов.

Потенциальная энергия системы из N отдельных атомов, обусловленная их взаимным притяжением под действием гравитационных сил, равна сумме потенциальных энергий всех пар атомов (рис. 9.6):

$$U = -G \sum_{\substack{\text{по всем} \\ \text{парам} \\ i \neq j}} \frac{M_i M_j}{r_{ij}} = -G \sum_{i>j}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{M_i M_j}{r_{ij}}. \qquad (20)$$

Мы даем это выражение в двух видах. В том виде, как оно написано посередине строки, мы указываем, что надо выполнить суммирование по всем парам атомов с индексами i и j, за исключением случаев, когда $i=j$, так как при этом вообще нет пары атомов. Случай $i=j$ может относиться только к собственной гравитационной энергии одиночного атома, а мы обычно исключаем ее из рассмотрения, потому что считаем, что она не меняется при соединении атомов в звезду. Выражение справа представляет собой лишь другое обозначение того же способа суммирования, при котором каждая пара индексов i, j засчитывается только один раз, т. е., например, мы засчитываем их в сочетании 4, 3, а не 3, 4. С таким же успехом мы можем написать:

$$U=-\frac{1}{2}G\sum_{i=1}^{N}{}'\sum_{j=1}^{N}\frac{M_iM_j}{r_{ij}}. \qquad (21)$$

Здесь мы учитываем каждую пару индексов два раза, например, один раз — как 3, 4, а другой раз — как 4, 3. Это удваивание исправляется коэффициентом 1/2, который обычно появляется в уравнениях, выражающих собственную энергию. Штрих у первого знака суммирования Σ — это условный знак, указывающий читателю, что из суммирования надо исключить слагаемое, в котором $i=j$.

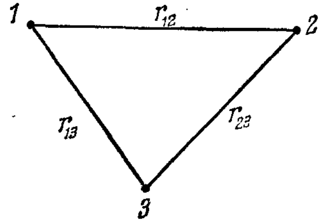

Рис. 9.6. Гравитационная энергия системы трех атомов с массами M_1, M_2, M_3 равна $U=$ $=-G\left(\frac{M_1M_2}{r_{12}}+\frac{M_1M_3}{r_{13}}+\frac{M_2M_3}{r_{23}}\right)$.

Пример. *Гравитационная энергия Галактики.* Оценим величину гравитационной энергии Галактики. Если не учитывать собственную гравитационную энергию отдельных звезд, то мы должны оценить только величину выражения (21).

Предположим, что Галактика состоит из N звезд, каждая из которых имеет массу M, и что расстояние между любыми двумя звездами равно R. Тогда уравнение (21) сводится к следующему соотношению:

$$U\approx\frac{1}{2}G(N-1)N\frac{M^2}{R}. \qquad (22)$$

(Сумма $\sum_{j=1}^{N}$ состоит из N одинаковых слагаемых, а сумма $\sum_{i=1}^{N}{}'$ — из $N-1$ слагаемых). Если $N\approx1{,}6\cdot10^{11}$, $R\approx10^{23}$ *см*, а $M\approx2\cdot10^{33}$ *г* (масса Солнца), то

$$U\approx-\frac{1}{2}(7\cdot10^{-8})\cdot(1{,}6\cdot10^{11})^2\cdot(2\cdot10^{33})^2\ \text{эрг}/10^{23}\approx-4\cdot10^{53}\ \text{эрг}. \quad (23)$$

Пример. *Гравитационная энергия однородного шара.* Нетрудно рассчитать собственную гравитационную энергию однородного шара с массой M и радиусом R. Заменим в уравнении (21) двойные суммы интегралами и выполним кратное интегрирование. Но сначала попытаемся угадать форму ответа. Какой должна быть эта энергия? В ответ должны входить G, M и R, и притом так, чтобы размерности обеих частей равенства были одинаковыми. Почему бы не написать этот ответ так:

$$U_{\text{ш}} \approx -\frac{GM^2}{R}? \qquad (24)$$

С точностью до числового коэффициента порядка единицы это действительно соответствует правильному ответу.

Выполнив точный расчет, мы получим для однородного шара следующий результат:

$$\boxed{U_{\text{ш}} = -\frac{3}{5}\cdot\frac{GM^2}{R},} \qquad (25)$$

так что наша оценка (24) довольно близка к истине. Чтобы показать, что числовой коэффициент равен 3/5, образуем мысленно твердый шар особым образом. Сначала рассмотрим энергию взаимодействия твердого шарового ядра с радиусом r и окружающего его шарового слоя, толщина которого равна dr (рис. 9.7). Если ρ — плотность вещества, то масса центрального шара равна $^4/_3\pi r^3\rho$, а масса слоя равна $(4\pi r^2)(dr)\rho$. Тогда из (14) следует, что потенциальная энергия сил тяготения между слоем и ядром равна

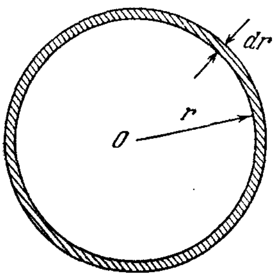

Рис. 9.7. Шаровой слой толщиной dr, окружающий сплошное шаровое ядро радиусом r. Последовательно наращивая такие слои, мы образуем сплошной шар радиусом R. Площадь одной из поверхностей слоя равна $4\pi r^2$, его толщина равна dr, так что объем слоя равен $4\pi r^2 dr$.

$$-\frac{G\left(\frac{4}{3}\pi r^3\rho\right)\cdot(4\pi r^2 dr\,\rho)}{r} = -\frac{1}{3}G(4\pi\rho)^2 r^4\,dr. \qquad (26)$$

Собственная гравитационная энергия сплошного шара радиусом R выражается интегралом, взятым от (26) в пределах от $r=0$ до $r=R$. Интегрирование соответствует последовательному накладыванию слоев на ядро до тех пор, пока радиус шара не достигнет R. Вначале ядро имеет нулевой радиус. Интегрирование выражения (26) дает следующий результат:

$$U_{\text{ш}} = -\frac{1}{3}G(4\pi\rho)^2\cdot\frac{1}{5}R^5 = -\frac{3}{5}G\left(\frac{4}{3}\pi\rho R^3\right)^2\frac{1}{R} = -\frac{3}{5}\cdot\frac{GM^2}{R}, \qquad (27)$$

потому что масса шара

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3. \qquad (28)$$

Пользуясь уравнением (27), можно определить собственную гравитационную энергию Солнца, считая $M_{\text{С}} \approx 2\cdot10^{33}$ *г* и $R_{\text{С}} \approx 7\cdot10^{10}$ *см*:

$$U_{\text{С}} = -\frac{3(7\cdot10^{-8})\cdot(2\cdot10^{33})^2}{5(7\cdot10^{10})}\ \text{эрг} \approx -2\cdot10^{48}\ \text{эрг}. \qquad (29)$$

Это огромная энергия! Эволюция Солнца может завершиться образованием плотной белой карликовой звезды с радиусом около 0,1 его нынешнего радиуса. Очевидно, что при сжатии высвободится большое количество гравитационной энергии.

Если подставить в уравнение (25) e^2 вместо $-GM^2$, то можно получить величину собственной электростатической энергии равномерно заряженного шара с общим зарядом e и радиусом R:

$$U_{\text{э.-с.}}=\frac{3}{5}\frac{e^2}{R}. \qquad (30)$$

Для того чтобы рассчитать собственную электростатическую энергию электрона, надо знать его радиус R. Так как у нас нет общей теории электрона, мы можем проделать это в обратном порядке, определяя радиус электрона по его энергии.

Имеется известный закон Эйнштейна, который гласит, что масса M всегда связана с энергией r следующим уравнением:

$$E=Mc^2, \qquad (31)$$

где c — скорость света. (Мы выведем это уравнение в гл. 12.) Если бы вся энергия электрона представляла собой электростатическую энергию равномерно распределенного заряда, то мы получили бы

$$U_{\text{э.-с.}}=\frac{3e^2}{5R}=mc^2, \qquad (32)$$

откуда можно было бы определить радиус электрона. Однако мы не знаем строения электрона. Модель, которую мы наметили, нельзя считать вполне удовлетворительной, так как неясно, чем скрепляется воедино заряд электрона. Почему он не разлетается под действием кулоновского отталкивания элементов этого заряда? В настоящее время мы не имеем теории, объясняющей строение электрона.

Опустим коэффициент 3/5 в (32). Было бы чересчур самонадеянно сохранять этот коэффициент, потому что это означало бы, что имеются точные сведения о строении электрона, которых на самом деле нет. Определим (условно) величину r_0 из соотношения

$$\frac{e^2}{r_0}\equiv mc^2; \qquad r_0\equiv\frac{e^2}{mc^2}=2{,}82\cdot 10^{-13}\ \text{см}. \qquad (33)$$

Эта величина называется *классическим радиусом электрона*. Она имеет какое-то отношение к электрону, но мы точно не знаем, какое. Тем не менее она называется характеристической длиной. Теперь мы сделаем небольшое отступление по поводу пристрастия физиков к характеристическим величинам.

9.4. Характеристические длины и характеристические числа

Перечень характеристических чисел — это не физика, так же как астрология — это не астрономия. Однако характеристические числа играют важную роль в физике. Когда мы видим, что постоянные, имеющие отношение к данному вопросу (как e, m и c имеют