образованием плотной белой карликовой звезды с радиусом около 0,1 его нынешнего радиуса. Очевидно, что при сжатии высвободится большое количество гравитационной энергии.

Если подставить в уравнение (25) e^2 вместо $-GM^2$, то можно получить величину собственной электростатической энергии равномерно заряженного шара с общим зарядом e и радиусом R:

$$U_{\text{э.-с.}} = \frac{3}{5}\frac{e^2}{R}. \tag{30}$$

Для того чтобы рассчитать собственную электростатическую энергию электрона, надо знать его радиус R. Так как у нас нет общей теории электрона, мы можем проделать это в обратном порядке, определяя радиус электрона по его энергии.

Имеется известный закон Эйнштейна, который гласит, что масса M всегда связана с энергией r следующим уравнением:

$$E = Mc^2, \tag{31}$$

где c — скорость света. (Мы выведем это уравнение в гл. 12.) Если бы вся энергия электрона представляла собой электростатическую энергию равномерно распределенного заряда, то мы получили бы

$$U_{\text{э.-с.}} = \frac{3e^2}{5R} = mc^2, \tag{32}$$

откуда можно было бы определить радиус электрона. Однако мы не знаем строения электрона. Модель, которую мы наметили, нельзя считать вполне удовлетворительной, так как неясно, чем скрепляется воедино заряд электрона. Почему он не разлетается под действием кулоновского отталкивания элементов этого заряда? В настоящее время мы не имеем теории, объясняющей строение электрона.

Опустим коэффициент 3/5 в (32). Было бы чересчур самонадеянно сохранять этот коэффициент, потому что это означало бы, что имеются точные сведения о строении электрона, которых на самом деле нет. Определим (условно) величину r_0 из соотношения

$$\frac{e^2}{r_0} \equiv mc^2; \qquad r_0 \equiv \frac{e^2}{mc^2} = 2{,}82 \cdot 10^{-13}\ см. \tag{33}$$

Эта величина называется *классическим радиусом электрона*. Она имеет какое-то отношение к электрону, но мы точно не знаем, какое. Тем не менее она называется характеристической длиной. Теперь мы сделаем небольшое отступление по поводу пристрастия физиков к характеристическим величинам.

9.4. Характеристические длины и характеристические числа

Перечень характеристических чисел — это не физика, так же как астрология — это не астрономия. Однако характеристические числа играют важную роль в физике. Когда мы видим, что постоянные, имеющие отношение к данному вопросу (как e, m и c имеют отношение к электромагнетизму и электрону), можно так скомбинировать, что образуется характеристическая величина с размерностью длины, то мы стремимся узнать, что́ эта длина означает. Это законный вопрос, и его постановка очень полезна. Некоторые характеристические величины имеют ясный смысл, а другие — не имеют его.

Особенно интересны безразмерные числовые постоянные. В гидродинамике мы встречаемся с безразмерным числом, называемым числом Рейнольдса. Когда число Рейнольдса велико, то наблюдается турбулентное течение жидкости; когда оно мало, течение является нетурбулентным, т. е. ламинарным. В атомной физике мы можем получить важную безразмерную числовую постоянную, комбинируя величины e, h и c. Величина h — это постоянная Планка; мы предпочитаем оперировать с $\hbar = h/2\pi$. Постоянная Планка определяется из соотношения $E = h\nu$ для световых волн; она выражает связь между частотой ν и энергией E фотона. Следовательно, h (и $\hbar$) имеет размерность [энергия·время]. Мы знаем, что e^2/r_0 имеет размерность энергии, таким образом, e^2 имеет размерность [энергия $\times$ $\times$ длина].

Поделив e^2 на $\hbar$, мы получим величину, имеющую размерность [длина/время], т. е. размерность скорости. Очевидно, что характеристическая скорость — это c, скорость света. Если мы поделим $e^2/\hbar$ на c, то получим безразмерную величину α:

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137,04}. \qquad (34)$$

Эта величина называется *постоянной тонкой структуры*. Такое название имеет исторические причины, связанные с теорией расщепления спектральных линий. Нам неизвестно, почему $e^2/\hbar c$ имеет именно эту числовую величину, а также неизвестно, можно ли ее вывести на основании какой-либо теории. Эти вопросы рассматриваются в т. IV.

Можно получить целый ряд важных характеристических длин, если делить классический радиус электрона на различные степени числа α. Одна из важных характеристических длин, часто встречающаяся в квантовой физике,— это *комптоновская длина волны* $\underline{\lambda}_к$ электрона:

$$\underline{\lambda}_к = \frac{r_0}{\alpha} = \frac{\hbar c}{e^2} \cdot \frac{e^2}{mc^2} = \frac{\hbar}{mc} = 3,86 \cdot 10^{-11}\ см. \qquad (35)$$

Иногда комптоновской длиной волны называется величина $\lambda_к = 2\pi\underline{\lambda}_к$.

Другая важная характеристическая длина — это *боровский радиус основного состояния атома водорода*:

$$a_0 = \frac{r_0}{\alpha^2} = \underline{\lambda}/\alpha = \frac{\hbar c}{e^2} \cdot \frac{\hbar}{mc} = \frac{\hbar^2}{me^2} = 0,529 \cdot 10^{-8}\ см. \qquad (36)$$

По существу, это радиус атома водорода. Если a_0 имеет отношение к расстоянию между протоном и электроном в атоме водорода и если электрон связан с протоном силами электростатического взаимодействия, то можно предположить, что энергия их связи (энергия ионизации) должна иметь величину порядка e^2/a_0, т. е. около 27 *эв*. Как было определено экспериментально, а также на основании более строгой теории, эта энергия связи равна $e^2/2a_0$.

Чем богаче будет ваш опыт в физике, технике, астрономии или химии, тем больше вы будете убеждаться в важном значении физических постоянных. Разберем другой пример. Рассмотрим характеристическую длину, которая получится, если приравнять Mc^2 собственной гравитационной энергии тела:

$$\frac{GM^2}{R_0} = Mc^2, \tag{37}$$

$$R_0 = \frac{GM}{c^2}.$$

Мы можем назвать R_0 *гравитационной длиной*. С чем она связана?

В таблице физических постоянных, данной в приложении, вы найдете, что число нуклонов (протонов и нейтронов) в известной нам части Вселенной равно приблизительно 10^{80}. Масса нуклона — около 10^{-24} *г*, так что масса известной нам Вселенной — величина порядка 10^{56} *г*. Тогда из (37) следует:

$$R_0 \approx \frac{(10^7)\cdot(10^{56})\ см}{(3\cdot 10^{10})^2} \approx 10^{28}\ см, \tag{38}$$

что согласуется с приведенным в этой таблице значением так называемого *радиуса Вселенной*. Это совпадение означает только, что при оценке массы известной нам части Вселенной всегда использовалось соотношение размерностей (37) (радиус R_0 можно оценить независимым путем). Однако имеются другие способы оценки, основанные на определении верхнего и нижнего пределов массы известной нам части Вселенной. Мы считаем, что число 10^{56} *г* соответствует правильному порядку этой величины. Действительно, общая теория относительности указывает, что соотношение, из которого мы определили R_0, имеет фундаментальное значение. Согласно этой теории, световой сигнал (фотон) не может уйти с поверхности, ограничивающей данную массу, если ее радиус R меньше, чем R_0. Следовательно, тело, размер которого $R < R_0$, не может светиться и должно быть невидимым.

Если за M взять массу Солнца, то

$$R_0 \approx \frac{(7\cdot 10^{-8})\cdot(2\cdot 10^{33})\ см}{(3\cdot 10^{10})^2} \approx 10^5\ см, \tag{39}$$

что во много раз меньше радиуса Солнца $R = 7\cdot 10^{10}$ *см*. Таким образом, величина R_0 оказывает влияние на решение задачи в том случае, если эта величина велика, и не оказывает влияния, если она мала (R_0 обратится в нуль, если $G = 0$). Из-за того, что для Солнца $R \gg R_0$, величина R_0 никак не определяет его состояние, по крайней мере в нынешних условиях. Величина R_0, возможно, приобретает значение для Солнца намного позднее, когда оно почти полностью «выгорит» и сильно сожмется. Известны звезды — белые карлики, имеющие массу, равную массе Солнца, при радиусе порядка радиуса Земли ($6 \cdot 10^8$ *см*). Но из расчета (39) видно, что даже для белого карлика гравитационная длина очень мала по сравнению с радиусом.

Недавно некоторые астрономы выдвинули теорию, что действительно существуют звезды (нейтронные звезды), размеры которых сравнимы с их гравитационной длиной.

Мы можем образовать другие характеристические величины, имеющие размерность времени (или частоты), массы, скорости и т. д. Построение и оценка характеристических величин, имеющих физический смысл, является превосходным приемом при поисках решения конкретных физических проблем. Определение порядка этих величин служит своего рода сигналом, предостерегающим нас от пренебрежения особенностями явления, несущественными в одних случаях, но имеющими решающее значение в других. Строители мостов и конструкторы самолетов иногда сталкивались с катастрофическими результатами случайной недооценки эффектов, порядок величины которых можно было бы определить путем несложного расчета на листке бумаги.

9.5. Силы, действующие по закону обратных квадратов, и статическое равновесие

В т. II мы покажем, что группа материальных точек (или точечных электрических зарядов), силы взаимодействия между которыми подчиняются закону обратных квадратов, не может находиться в устойчивом *статическом* равновесии. Слово «статическое» означает, что все материальные точки неподвижны. Этот результат становится наглядным при рассмотрении рис. 9.8 и рис. 9.9, где изображены линии равного потенциала в системе, состоящей из двух или четырех неподвижных материальных точек или электрических зарядов одного знака (например, положительных). Пробная масса, помещенная в центре схемы, обязательно станет двигаться по направлению к той или другой из неподвижных материальных точек.

9.6. Орбиты планет

Рассмотрим теперь задачу Кеплера: требуется найти орбиты двух тел, силы взаимодействия между которыми определяются законом обратных квадратов. Классическим примером объекта для этой задачи является движение планет Солнечной системы. Другие важные примеры — это движение спутников вокруг планет и относительное движение компонентов двойной звезды. Уравнение движения $\mathbf{F}=M\mathbf{a}$ для i-й материальной точки из системы N таких