по крайней мере в нынешних условиях. Величина R_0, возможно, приобретает значение для Солнца намного позднее, когда оно почти полностью «выгорит» и сильно сожмется. Известны звезды — белые карлики, имеющие массу, равную массе Солнца, при радиусе порядка радиуса Земли ($6\cdot10^8$ *см*). Но из расчета (39) видно, что даже для белого карлика гравитационная длина очень мала по сравнению с радиусом.

Недавно некоторые астрономы выдвинули теорию, что действительно существуют звезды (нейтронные звезды), размеры которых сравнимы с их гравитационной длиной.

Мы можем образовать другие характеристические величины, имеющие размерность времени (или частоты), массы, скорости и т. д. Построение и оценка характеристических величин, имеющих физический смысл, является превосходным приемом при поисках решения конкретных физических проблем. Определение порядка этих величин служит своего рода сигналом, предостерегающим нас от пренебрежения особенностями явления, несущественными в одних случаях, но имеющими решающее значение в других. Строители мостов и конструкторы самолетов иногда сталкивались с катастрофическими результатами случайной недооценки эффектов, порядок величины которых можно было бы определить путем несложного расчета на листке бумаги.

9.5. Силы, действующие по закону обратных квадратов, и статическое равновесие

В т. II мы покажем, что группа материальных точек (или точечных электрических зарядов), силы взаимодействия между которыми подчиняются закону обратных квадратов, не может находиться в устойчивом *статическом* равновесии. Слово «статическое» означает, что все материальные точки неподвижны. Этот результат становится наглядным при рассмотрении рис. 9.8 и рис. 9.9, где изображены линии равного потенциала в системе, состоящей из двух или четырех неподвижных материальных точек или электрических зарядов одного знака (например, положительных). Пробная масса, помещенная в центре схемы, обязательно станет двигаться по направлению к той или другой из неподвижных материальных точек.

9.6. Орбиты планет

Рассмотрим теперь задачу Кеплера: требуется найти орбиты двух тел, силы взаимодействия между которыми определяются законом обратных квадратов. Классическим примером объекта для этой задачи является движение планет Солнечной системы. Другие важные примеры — это движение спутников вокруг планет и относительное движение компонентов двойной звезды. Уравнение движения $\mathbf{F}=M\mathbf{a}$ для i-й материальной точки из системы N таких

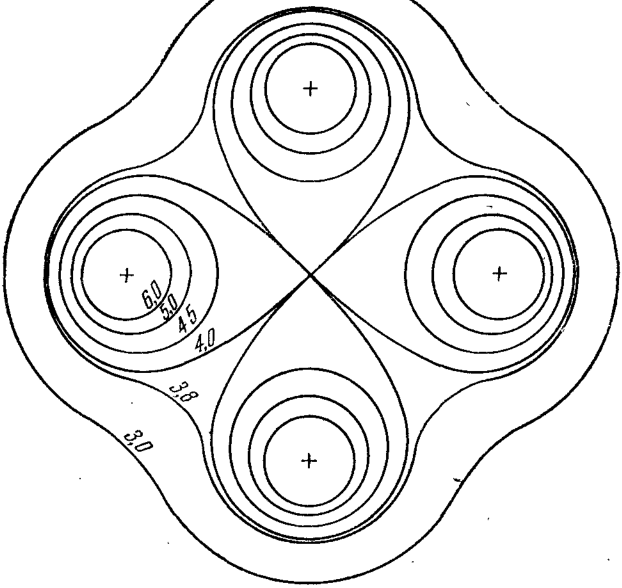

Рис. 9.8. Контурная карта эквипотенциальных поверхностей между четырьмя равными массами.

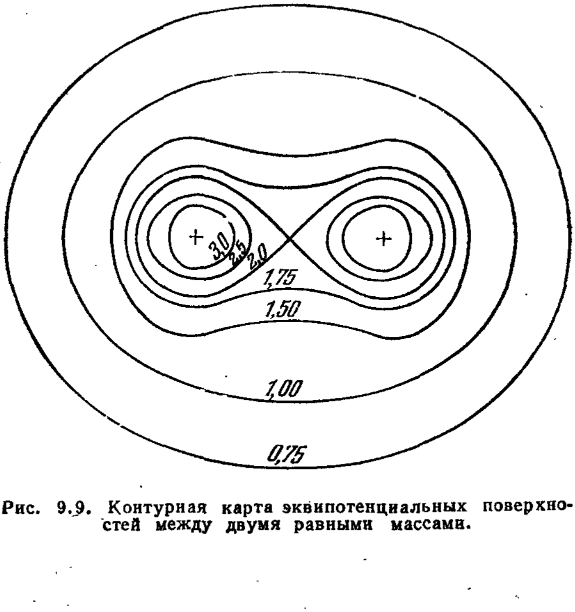

Рис. 9.9. Контурная карта эквипотенциальных поверхностей между двумя равными массами.

точек имеет следующий вид:

$$M_i \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = -GM_i \sum_{j=1}^{N}{}' \frac{M_j}{r_{ij}^2} \hat{\mathbf{r}}_{ij}. \tag{40}$$

Штрих при Σ означает, что из суммирования надо исключить слагаемое, для которого $j=i$. В уравнении (40)

$$\mathbf{r}_{ij} \equiv \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, \tag{41}$$

т. е. $\mathbf{r}_{ij}$—это вектор, проведенный из точки i в точку j. В правой части уравнения (40) суммируются силы тяготения, действующие на материальную точку i со стороны $N-1$ других материальных точек. Это уравнение написано в векторной форме, и, следовательно, его можно заменить тремя отдельными уравнениями для составляющих радиуса-вектора $\mathbf{r}_i$. Для N материальных точек мы должны решить $3N$ совместных уравнений с $6N$ начальными условиями для $3N$ координат и $3N$ скоростей. Это совсем не простая задача.

Если число материальных точек невелико, то легко можно решить эти уравнения числовыми методами с помощью аналоговой или цифровой электронной счетной машины. Числовые методы являются общепринятыми для расчетов орбит систем, состоящих более чем из двух материальных точек. Решение задачи двух тел может быть выражено в аналитической форме, когда эти тела представляют собой однородные шары; ниже мы получим это общее аналитическое решение задачи двух тел. Точные аналитические решения редко встречаются в физике. Они изящны сами по себе, но их научная ценность отнюдь не больше, чем ценность числовых решений. Не следует недооценивать удобства и возможности, создаваемые применением числовых методов расчета. В конце этой главы, в Дополнении 2, мы даем пример числового расчета орбиты.

9.7. Задача двух тел. Приведенная масса

Задачу о движении двух тел под действием центральных сил всегда можно свести к разновидности задачи о движении одного тела. Это является значительным упрощением. Хотя процесс решения, дающего форму орбиты, состоит из большого числа операций, ход рассуждений несложен. Уравнения движения (в одной и той же инерциальной системе отсчета) двух однородных сферических тел, притягиваемых друг к другу силами тяготения, имеют следующий вид:

$$M_1 \frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = -\frac{GM_1M_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \qquad M_2 \frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = \frac{GM_1M_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \tag{42}$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ (рис. 9.10). В результате почленного сложения двух уравнений (42) получается

$$M_1\ddot{\mathbf{r}}_1 + M_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = 0. \tag{43}$$

Отсюда можно вывести закон сохранения полного импульса для