

точек имеет следующий вид:

$$M_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = -GM_i \sum_{j=1}^N \frac{M_j}{r_{ij}^2} \hat{\mathbf{r}}_{ij}. \quad (40)$$

Штрих при  $\Sigma$  означает, что из суммирования надо исключить слагаемое, для которого  $j=i$ . В уравнении (40)

$$\hat{\mathbf{r}}_{ij} \equiv \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, \quad (41)$$

т. е.  $\mathbf{r}_{ij}$  — это вектор, проведенный из точки  $i$  в точку  $j$ . В правой части уравнения (40) суммируются силы тяготения, действующие на материальную точку  $i$  со стороны  $N-1$  других материальных точек. Это уравнение написано в векторной форме, и, следовательно, его можно заменить тремя отдельными уравнениями для составляющих радиуса-вектора  $\mathbf{r}_i$ . Для  $N$  материальных точек мы должны решить  $3N$  совместных уравнений с  $6N$  начальными условиями для  $3N$  координат и  $3N$  скоростей. Это совсем не простая задача.

Если число материальных точек невелико, то легко можно решить эти уравнения числовыми методами с помощью аналоговой или цифровой электронной счетной машины. Числовые методы являются общепринятыми для расчетов орбит систем, состоящих более чем из двух материальных точек. Решение задачи двух тел может быть выражено в аналитической форме, когда эти тела представляют собой однородные шары; ниже мы получим это общее аналитическое решение задачи двух тел. Точные аналитические решения редко встречаются в физике. Они изящны сами по себе, но их научная ценность отнюдь не больше, чем ценность числовых решений. Не следует недооценивать удобства и возможности, создаваемые применением числовых методов расчета. В конце этой главы, в Дополнении 2, мы даем пример числового расчета орбиты.

## 9.7. Задача двух тел. Приведенная масса

Задачу о движении двух тел под действием центральных сил всегда можно свести к разновидности задачи о движении одного тела. Это является значительным упрощением. Хотя процесс решения, дающего форму орбиты, состоит из большого числа операций, ход рассуждений несложен. Уравнения движения (в одной и той же инерциальной системе отсчета) двух однородных сферических тел, притягиваемых друг к другу силами тяготения, имеют следующий вид:

$$M_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = -\frac{GM_1 M_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad M_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \frac{GM_1 M_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (42)$$

где  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  (рис. 9.10). В результате почленного сложения двух уравнений (42) получается

$$M_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + M_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = 0. \quad (43)$$

Отсюда можно вывести закон сохранения полного импульса для

системы, состоящей из двух тел; интегрируя (43) по времени, получаем

$$M_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + M_2 \dot{\mathbf{r}}_2 = \text{const.} \quad (44)$$

Левая часть представляет собой полный импульс системы.

Положение центра масс системы двух тел определяется как

$$\mathbf{R}_{ц.м} = \frac{M_1 \mathbf{r}_1 + M_2 \mathbf{r}_2}{M_1 + M_2}. \quad (45)$$

Дифференцируя обе части уравнения (45) по времени, получаем

$$\dot{\mathbf{R}}_{ц.м} = \frac{M_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + M_2 \dot{\mathbf{r}}_2}{M_1 + M_2}. \quad (46)$$

Сравнивая с (44), мы видим, что  $\dot{\mathbf{R}}_{ц.м} = \text{const.}$  Следовательно, центр масс системы движется с постоянной скоростью. Мы всегда можем принять эту скорость равной нулю, выбрав соответствующую инерциальную систему отсчета.

Теперь перепишем уравнения движения (42) следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} &= -\frac{1}{M_1} \frac{GM_1 M_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \\ \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} &= \frac{1}{M_2} \frac{GM_1 M_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (47)$$

Вычтем одно уравнение из другого:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{dt^2} &= \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \\ &= -\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right) \frac{GM_1 M_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (48)$$

В это уравнение входит только один вектор  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ . Мы можем упростить уравнение (48), введя *приведенную массу*  $\mu$ :

$$\boxed{\frac{1}{\mu} = \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}}. \quad (49)$$

Тогда уравнение (48) принимает следующий вид:

$$\boxed{\mu \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GM_1 M_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}}. \quad (50)$$

Эта задача на движение одного тела; нам надо решить ее, чтобы найти вектор  $\mathbf{r}$  как функцию времени. В исходной задаче двух тел, сформулированной в виде системы уравнений (42), нужно было определить зависимость двух векторов  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  от времени.

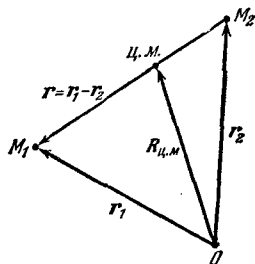


Рис. 9.10. Силы взаимодействия материальных точек  $M_1$  и  $M_2$  — центральные силы, коллинеарные с вектором  $\mathbf{r}$ ;  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  — векторы, описывающие положение  $M_1$  и  $M_2$  в инерциальной системе отсчета с началом в точке  $O$ . Если не действуют внешние силы, то  $\dot{\mathbf{R}}_{ц.м.} = 0$ .

Используем уравнения (49) и (50) следующим образом. Вспомним, что  $\mathbf{r}$  — это вектор, идущий из точки  $M_2$  в точку  $M_1$ .

Исходя из уравнения (50), мы можем найти решение для движения тела  $M_1$  относительно  $M_2$ , как если бы  $M_2$  было закреплено в начале координат инерциальной системы отсчета, но только в качестве массы надо подставить в левую часть уравнения (50)  $\mu$ , а не  $M_1$ . Таким образом, мы свели задачу двух тел к задаче о движении одного тела, имеющего массу  $\mu$ . Заметим, однако, что величина силы, входящей в уравнение (50), не равна  $-G\mu M_2/r^2$ ! Чтобы найти орбиты двух тел, нам достаточно решить задачу о движении одного тела. Сведение задачи двух тел к задаче об одном теле может быть выполнено таким же способом для любой центральной силы; при этом всегда появляется приведенная масса.

Приведенная масса должна быть меньше, чем любая из масс  $M_1$  и  $M_2$ . При  $M_1 = M_2 = M$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{2}{M}, \quad \mu = \frac{M}{2}. \quad (51)$$

Если  $M_1 \ll M_2$ , то из (49) следует:

$$\mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} = M_1 \frac{1}{(M_1/M_2) + 1} \cong M_1 \left(1 - \frac{M_1}{M_2}\right). \quad (52)$$

Применив формулу бинома Ньютона, мы разложили дробь в степенной ряд и оставили только слагаемое низшего порядка относительно  $M_1/M_2$ . Если  $M_1$  равно  $m$  (массе электрона), а  $M_2$  равно  $M_p$  (массе протона), то приведенная масса равна

$$\mu \approx m \left(1 - \frac{1}{1836}\right). \quad (53)$$

Значение приведенной массы сильнее зависит от величины более легкой из двух масс. Отклонение  $\mu$  атома водорода от  $m$  легко можно обнаружить по спектру атомарного водорода.

Атом позитрония — это водородоподобный атом без протона, состоящий из позитрона и электрона. Позитрон — частица с массой, равной массе электрона, но имеющая положительный заряд  $e$ . Из уравнения (51) следует, что линейчатые спектры атомарного водорода и позитрония сходны (рис. 9.11), а их различие обусловлено только тем обстоятельством, что приведенная масса атома позитрония составляет около половины приведенной массы атома водорода. Характер кулоновского взаимодействия между электроном и позитроном такой же, как между электроном и протоном.

**Пример. Колебания двухатомной молекулы.** Два атома, соединенные в устойчивую молекулу, обладают потенциальной энергией, представляющей собой квадратичную функцию разности  $r - r_0$  между фактическим расстоянием между ними  $r$  и равновесным расстоянием  $r_0$ :

$$U(r) = \frac{1}{2}C(r - r_0)^2, \quad (53a)$$

если  $(r - r_0)/r_0 \ll 1$ . Сила, соответствующая этой потенциальной энергии, направлена вдоль линии, соединяющей атомы, а ее ве-

личина определяется из следующего уравнения (если молекула не вращается):

$$F = -\frac{dU}{d(r-r_0)} = -C(r-r_0). \quad (53б)$$

Уравнения (53а) и (53б) представляют собой уравнения гармонического осциллятора с силовой постоянной  $C$ . Какова частота колебаний этого осциллятора, если массы атомов равны  $M_1$  и  $M_2$ ?

При свободных колебаниях оба атома находятся в движении, а их центр масс неподвижен. Естественно представить уравнение движения двухатомной молекулы в виде (50), заменив силу тяготения на силу, заданную уравнением (53б):

$$\mu \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -C(r-r_0) \hat{\mathbf{r}}. \quad (53в)$$

Если молекула не вращается, то направление  $\mathbf{r}$  остается неизменным и при этом условии

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d^2 r}{dt^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (53г)$$

(Если же направление  $\mathbf{r}$  меняется, то производная от  $\mathbf{r}$  не выражается так просто — см. ниже уравнение (58).) Используя соотношение (53г), мы можем переписать уравнение (53в) в следующем виде:

$$\mu \frac{d^2 r}{dt^2} = -C(r-r_0), \quad (53д)$$

а это представляет собой уравнение движения простого гармонического осциллятора с угловой частотой колебаний

$$\omega_0 = \left(\frac{C}{\mu}\right)^{1/2}. \quad (53е)$$

Из спектральных измерений известно, что основные колебательные частоты молекул HF и HCl равны

$$\nu_0(\text{HF}) = \frac{\omega_0(\text{HF})}{2\pi} = 1,202 \cdot 10^{14} \text{ сек}^{-1},$$

$$\nu_0(\text{HCl}) = \frac{\omega_0(\text{HCl})}{2\pi} = 0,871 \cdot 10^{14} \text{ сек}^{-1}.$$

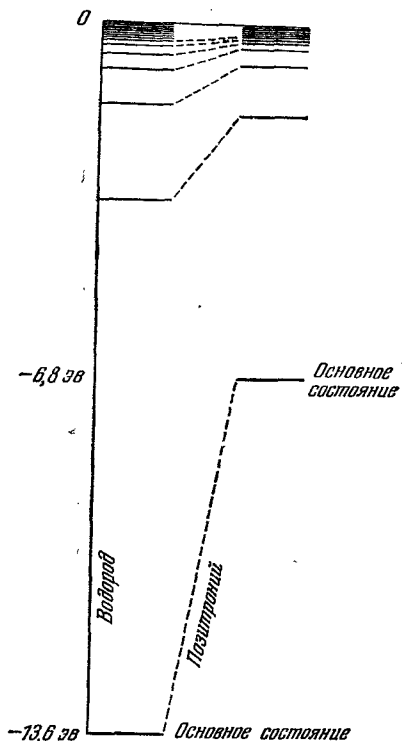


Рис. 9.11. Энергетические уровни атома водорода и атома позитрония. Приведенная масса атома водорода равна

$$\mu = \frac{m_e}{1 + \frac{1}{1836}} \approx m_e.$$

Приведенная масса атома позитрония равна

$\mu = \frac{1}{2} m_e$ ,  
и это является причиной различия энергий в 2 раза.

Вспользуемся этими данными, чтобы сравнить силовые постоянные  $C_{\text{HF}}$  и  $C_{\text{HCl}}$ . Определим приведенные массы этих молекул в атомных единицах массы:

$$\frac{1}{\mu_{\text{HF}}} \approx \frac{1}{1} + \frac{1}{19} = \frac{20}{19}, \quad \mu_{\text{HF}} \approx 0,950;$$

$$\frac{1}{\mu_{\text{HCl}}} \approx \frac{1}{1} + \frac{1}{35} = \frac{36}{35}, \quad \mu_{\text{HCl}} \approx 0,973.$$

Для хлора мы подставили атомную массу его наиболее распространенного изотопа  $\text{Cl}^{35}$ . Заметим, что приведенные массы близки по величине друг к другу. Это вызвано тем, что основную роль в колебаниях играет атом водорода, являющийся в молекуле более легким.

Теперь по формуле (53е) мы можем рассчитать отношение силовых постоянных:

$$\frac{C_{\text{HF}}}{C_{\text{HCl}}} = \frac{(\mu\omega_0^2)_{\text{HF}}}{(\mu\omega_0^2)_{\text{HCl}}} \approx \frac{54,0 \cdot 10^{28}}{29,0 \cdot 10^{28}} \approx 1,86, \quad (53ж)$$

а силовая постоянная молекулы HF равна

$$C_{\text{HF}} = (54,0 \cdot 10^{28}) \cdot (1,66 \cdot 10^{-24}) \text{ дин/см} \approx 9 \cdot 10^5 \text{ дин/см}, \quad (53з)$$

причем мы ввели здесь коэффициент, переводящий массу из единиц атомной массы в граммы.

Правильно ли полученное значение  $C$ ? Предположим, что мы растягиваем молекулу (имеющую длину около 1 Å, т. е.  $1 \cdot 10^{-8}$  см)

на 0,5 Å. Работа, затрачиваемая на это, вероятно, будет примерно достаточна для того, чтобы разъединить молекулу на отдельные атомы H и F. Согласно (53а) работа растяжения на 0,5 Å должна быть величиной такого порядка:

$$\frac{1}{2} C (r - r_0)^2 \approx \frac{1}{2} (9 \cdot 10^5) \cdot (0,5 \cdot 10^{-8})^2 \text{ эрг} \approx \approx 1 \cdot 10^{-11} \text{ эрг},$$

или

$$(1 \cdot 10^{-11}) \text{ эрг} / (1,6 \cdot 10^{-12}) \approx 6 \text{ эв}.$$

Рис. 9.12. График потенциальной энергии как функции расстояния  $r$  между двумя атомами, образующими молекулу. Равновесному положению соответствует расстояние  $r_0$ .

Это как раз порядок величины энергии разложения молекулы на отдельные атомы.

При выполнении этого оценочного расчета мы использовали уравнение (53ж) за пределами той области расстояний между атомами, для которой оно справедливо. В действительности график внутримолекулярной потенциальной энергии имеет вид, показанный на рис. 9.12.