

## 9.8. Задача о движении одного тела

Задача двух тел для однородных шаров или материальных точек была выше сведена к задаче о движении одного тела, задаваемой уравнением (50):

$$\mu \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = - \frac{GM_1 M_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (54)$$

где  $\mathbf{r}$  — вектор, соединяющий две материальные точки (рис. 9.13). Движение центра масс системы из двух материальных точек не зависит от силы их взаимодействия, а определяется только внешними силами, если они имеются. Займемся относительным движением

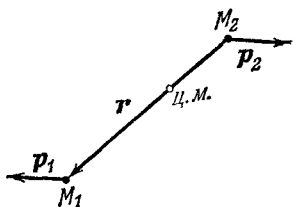


Рис. 9.13. В инерциальной системе отсчета, относительно которой центр масс неподвижен,  $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$ . Сумма моментов импульсов материальных точек  $M_1$  и  $M_2$  относительно центра масс — это постоянная величина: полный момент импульса системы  $\mathbf{J}$ .

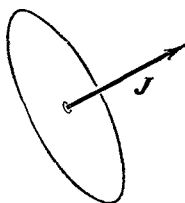


Рис. 9.14. Так как момент импульса  $\mathbf{J}$  постоянен, движение под действием центральной силы является плоским.

двух материальных точек, определяемым уравнением (54). Это одна из наиболее важных задач в классической механике. В решении ее используется почти все, что мы знаем, а также еще некоторые приемы.

Из гл. 6 нам известно, что момент импульса материальной точки, движущейся вокруг неподвижного центра сил, остается постоянным (рис. 9.14). Следовательно, момент импульса должен оставаться постоянным и для нашей задачи, сводимой к задаче о движении одного тела:

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mu \dot{\mathbf{r}} = \text{const.} \quad (55)$$

Он постоянен как по направлению, так и по величине. Это приводит к важным упрощениям при решении уравнения (54). Легко показать, что момент импульса в уравнении (55) в точности равен моменту импульса, определенному по обычной формуле:

$$\mathbf{J} = \mathbf{r}_1 \times M_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + \mathbf{r}_2 \times M_2 \dot{\mathbf{r}}_2,$$

где векторы  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  определяют положение обеих материальных точек в системе отсчета с началом в центре масс  $\mathbf{R}_{\text{ц.м.}}$ . Для этого

надо просто переписать уравнение (55) в виде

$$\mathbf{J} = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \times (\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2) \quad (55a)$$

и подставить в него соотношения, получающиеся из (46) при  $\dot{\mathbf{R}}_{ц.м.} = 0$ , а именно:

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = -(M_2/M_1)\dot{\mathbf{r}}_2, \quad \dot{\mathbf{r}}_2 = -(M_1/M_2)\dot{\mathbf{r}}_1.$$

Из уравнения (55) следует, что движение системы должно совершаться в одной плоскости, потому что вектор  $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$  должен иметь постоянное направление, если имеет постоянное направление вектор  $\mathbf{J}$ . Положение материальной точки на плоскости определяется

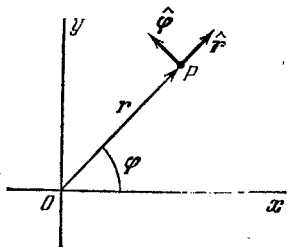


Рис. 9.15. Система полярных координат на плоскости удобна для описания движения приведенной массы  $\mu$ , находящейся в точке  $P$ , если это движение совершается под действием центральной силы вокруг неподвижного центра сил в точке  $\hat{O}$ ;  $\hat{\mathbf{r}}$  и  $\hat{\boldsymbol{\phi}}$  — ортогональные единичные векторы.

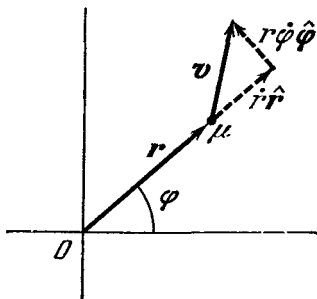


Рис. 9.16. Разложение  $\mathbf{v}$  материальной точки на радиальную и азимутальную составляющие. Кинетическая энергия равна

$$K = \frac{1}{2} \mu v^2 = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2).$$

Полная энергия равна

$$E = K + U = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \mu r^2 \dot{\varphi}^2 + U.$$

только двумя координатами. Выберем  $\hat{\mathbf{r}}$  — единичный вектор, идущий в направлении вектора, соединяющего избранное начало координат с данной материальной точкой, и  $\hat{\boldsymbol{\phi}}$  — единичный вектор, лежащий в данной плоскости и перпендикулярный к  $\hat{\mathbf{r}}$  (рис. 9.15). Скорость  $\dot{\mathbf{r}}$  имеет составляющую в направлении  $\hat{\mathbf{r}}$  и составляющую в направлении  $\hat{\boldsymbol{\phi}}$  (рис. 9.16):

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r \dot{\varphi} \hat{\boldsymbol{\phi}} = \dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r \omega \hat{\boldsymbol{\phi}}, \quad (56)$$

где  $\varphi \equiv \omega$ . Пользуясь этим результатом, можно согласно (55) преобразовать момент импульса таким образом:

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mu (\dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r \dot{\varphi} \hat{\boldsymbol{\phi}}) = \mu r^2 \omega \hat{\mathbf{z}}, \quad (57)$$

где  $\hat{\mathbf{z}}$  — единичный вектор  $\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\phi}}$ , перпендикулярный к плоскости, в которой совершается движение. Мы использовали здесь тождество  $\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{r}} = 0$ .

Рассмотрим теперь уравнение для скалярной величины  $\ddot{r}$ . Напомним (см. гл. 3), что для описания движения во вращающейся системе координат необходимо ввести центробежную силу инерции, равную по абсолютной величине  $\mu\omega^2 r$  и направленную по радиусу от центра вращения. Уравнение движения во вращающейся системе координат:

$$\mu r = \text{сила тяготения} + \text{центробежная сила}, \quad (58)$$

или

$$\mu \ddot{r} = -\frac{GM_1 M_2}{r^2} + \mu \omega^2 r. \quad (59)$$

В этом уравнении и  $r$  и  $\omega$  могут изменяться со временем.

Теперь используем уравнение (57), чтобы выразить  $\omega$  через  $J$ :

$$\omega^2 = \frac{J^2}{\mu^2 r^4}, \quad (60)$$

и тогда можно написать уравнение (59) в следующем виде:

$$\mu \ddot{r} = -\frac{GM_1 M_2}{r^2} + \frac{J^2}{\mu r^3}, \quad (61)$$

где от времени зависит только  $r$ , потому что момент импульса является постоянной величиной. Решение уравнения (61) имело огромное значение в истории небесной механики. Оно позволило рассчитать движение планет, двойных звезд и спутников.

Для решения уравнения (61) удобно выразить  $r$  как функцию  $r(\varphi)$  угла  $\varphi$ . Мы получим, пользуясь уравнением (57),

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \omega = \frac{dr}{d\varphi} \frac{J}{\mu r^2}. \quad (62)$$

Далее, дифференцируя еще раз и используя еще раз уравнение (57), а также (62), получим

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d^2 r}{d\varphi^2} \left( \frac{J}{\mu r^2} \right)^2 + \frac{dr}{d\varphi} \frac{J}{\mu} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{r^2} \right) = \frac{d^2 r}{d\varphi^2} \left( \frac{J}{\mu r^2} \right)^2 - \frac{2}{r^3} \frac{J}{\mu} \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \frac{J}{\mu r^2}. \quad (63)$$

Введем функцию  $\omega(\varphi)$ , определив ее так:

$$\omega(\varphi) = \frac{1}{r(\varphi)}. \quad (64)$$

Оказалось (в итоге столетнего опыта), что введение этой функции

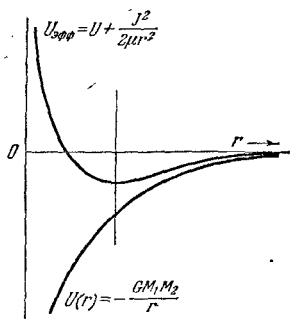


Рис. 9.17. Эффективная сила, величина которой равняется правой части уравнения (61), может быть определена как  $-\partial U_{\text{эфф}}/\partial r$ , где  $U_{\text{эфф}}$  — эффективная потенциальная энергия

$$U_{\text{эфф}}(r) = U(r) + \frac{J^2}{2\mu r^2}.$$

Введение понятия эффективной потенциальной энергии полезно при рассмотрении следствий закона сохранения момента импульса в отношении движения материальной точки. При этом мы видим, что если момент импульса остается постоянным, то при малых расстояниях  $r$  действует сила отталкивания

позволяет получить более простое дифференциальное уравнение, чем уравнение относительно  $r$ . Продифференцируем (64) два раза:

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}, \quad \frac{d^2\omega}{d\varphi^2} = -\frac{1}{r^2} \frac{d^2r}{d\varphi^2} + \frac{2}{r^3} \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2. \quad (65)$$

Сравнивая (65) с (63), мы видим, что

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{1}{r^2} \left(\frac{J}{\mu}\right)^2 \frac{d^2\omega}{d\varphi^2}, \quad (66)$$

и уравнение движения (61) можно переписать в следующем виде:

$$-\omega^2 \frac{J^2 d^2\omega}{\mu d\varphi^2} = -\omega^2 GM_1 M_2 + \omega^3 \frac{J^2}{\mu^2}, \quad (67)$$

или

$$\frac{d^2\omega}{d\varphi^2} + \omega = \frac{\mu GM_1 M_2}{J^2}. \quad (68)$$

Это очень простое уравнение: его правая часть — постоянная величина.

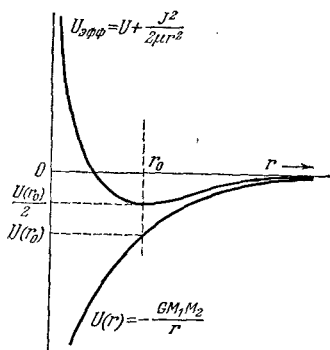


Рис. 9.18.  $U_{эфф}$  достигает минимума при  $r=r_0$ . В этой точке  $U_{эфф}=U/2$ .

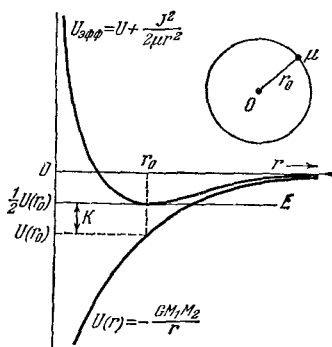


Рис. 9.19. Полная энергия не может быть меньше минимального значения  $U_{эфф}$ . Если она точно равна этому значению, то  $\mu r^2/2=0$  и  $r=r_0$  всегда. Движение является круговым, причем

$$K = E - U = -\frac{U(r_0)}{2} = \frac{GM_1 M_2}{2r_0}.$$

Левая часть уравнения (68) напоминает уравнение движения гармонического осциллятора. Такое же уравнение, но без правой части:

$$\frac{d^2\omega}{d\varphi^2} + \omega = 0, \quad (69)$$

имеет решение  $\omega = A \cos \varphi$ , где  $A$  — произвольная постоянная. Если к  $\omega$  прибавить постоянную  $\mu GM_1 M_2 / J^2$ , то получим следующую функцию:

$$\omega = A \cos \varphi + \frac{\mu GM_1 M_2}{J^2}, \quad (70)$$

являющуюся решением уравнения (68). (Проверьте это!) Вспомним, что  $\omega \equiv 1/r$ .

Уравнение (70) как раз представляет собой уравнение конического сечения (эллипс, окружность, парабола или гипербола) в полярных координатах (рис. 9.20). Из курса аналитической геометрии известно, что уравнение конического сечения (т. е. сечения

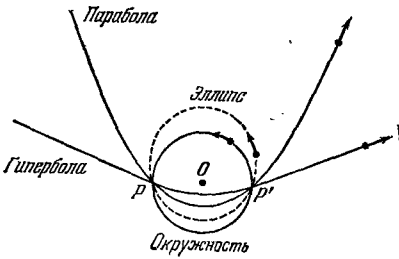
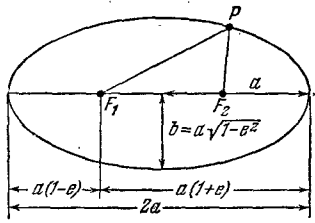


Рис. 9.20. Свойства эллипса. Для любой точки  $P$  сумма расстояний  $F_1P + F_2P = \text{const} = 2a$ . Уравнение эллипса, в полярных координатах:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1-e \cos \varphi}, \quad 0 < e < 1.$$

Малая полуось эллипса равна  $b = a\sqrt{1-e^2}$ .  
Площадь эллипса равна  $\pi ab$ .

Рис. 9.21. Орбиты тел, имеющих одни и те же приведенную массу и момент импульса  $J$ , но различные энергии  $E$ , причем центр сил всех орбит находится в одной и той же точке  $O$ . Все орбиты пересекаются в точках  $P$  и  $P'$ .

Орбита	Эксцентриситет
Окружность	$e=0, \quad \left. \begin{array}{l} E < 0 \\ e=1/3, \\ e=1 \end{array} \right\} E < 0$
Эллипс	
Парабола	$e=1, \quad E=0,$
Гипербола	$e=1, \quad E > 0$

конуса плоскостью) в полярных координатах может быть написано в таком общем виде:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{se} (1 - e \cos \varphi). \tag{71}$$

Как известно, постоянная  $e$  называется *эксцентриситетом*. Другая постоянная  $s$  определяет размеры фигуры. Уравнению (71) соответствуют четыре возможных типа кривых (рис. 9.21):

- гипербола,  $e > 1$ ;
- парабола,  $e = 1$ ;
- эллипс,  $0 < e < 1$ ;
- окружность,  $e = 0$ .

Нетрудно убедиться, что уравнение (71) действительно описывает одну из этих кривых, например эллипс. Надо только рассчитать  $r$  для интервала значений  $\varphi$ . Результаты расчета удобно вычертить на бумаге с полярной координатной сеткой. На такой бумаге нанесены линии постоянного радиуса и линии с постоянным полярным углом. Ниже приводятся результаты приближенного расчета по уравнению (71) для случая, когда  $s=1$  и  $e=1/2$ ; если нанести эти значения  $r$  и  $\varphi$  на бумагу с полярной координатной

сеткой, можно удостовериться, что кривая представляет собой эллипс (рис. 9.22—9.24).

$\varphi$	$\cos \varphi$	$2 \left(1 - \frac{1}{2} \cos \varphi\right)$	$r$	$\varphi$	$\cos \varphi$	$2 \left(1 - \frac{1}{2} \cos \varphi\right)$	$r$
$0^\circ$	1,00	1,00	1,00	$100^\circ$	-0,17	2,17	0,46
$20^\circ$	0,94	1,06	0,94	$120^\circ$	-0,50	2,50	0,40
$40^\circ$	0,77	1,23	0,81	$140^\circ$	-0,77	2,77	0,36
$60^\circ$	0,50	1,50	0,67	$160^\circ$	-0,94	2,94	0,34
$80^\circ$	0,17	1,83	0,55	$180^\circ$	-1,00	3,00	0,33
$90^\circ$	0,00	2,00	0,50				

Проделайте такой же расчет для  $s=1, e=2$ . Эта кривая является гиперболой.

Сравнивая уравнения (70) и (71), находим

$$\frac{1}{se} = \frac{\mu GM_1 M_2}{J^2}, \quad \frac{1}{s} = -A. \quad (72)$$

Теперь постараемся выразить  $e$  (или  $s$ ) через полную энергию системы  $E$ . (Энергия — это еще одна величина, остающаяся постоянной при движении.) Чтобы сделать это наиболее легким способом, заметим, что значение энергии можно определить особенно просто, когда расстояние материальной точки от начала координат достигает минимума или максимума, т. е. когда вектор скорости перпендикулярен к  $r$ . Пользуясь уравнениями (56) и (57), можно выразить кинетическую энергию в этих точках в простейшем виде (потому что только в этих точках  $\dot{r}=0$ , а во всех других точках орбиты кинетическая энергия содержит также сла-

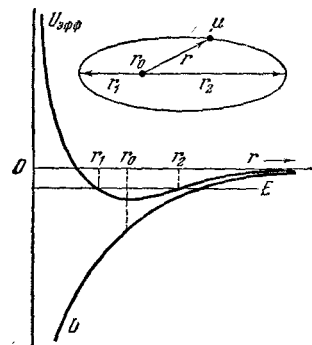


Рис. 9.22. При  $0 > E > U_{эфф}(r)$  движение совершается между «поворотными» точками  $r_1$  и  $r_2$ . Орбита представляет собой эллипс, причем одному из фокусов соответствует расстояние  $r_0$ , для которого функция  $U_{эфф}$  минимальна. При  $E \rightarrow 0$  величина  $r_2 \rightarrow \infty$ , эксцентриситет

$$e = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} \rightarrow 1,$$

т. е. орбита превращается в параболу.

$$K = \frac{1}{2} \mu \dot{r} \cdot \dot{r} = \frac{1}{2} \mu r^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{J}{\mu r}\right)^2. \quad (73)$$

Из уравнения (73) мы получаем следующее соотношение, связывающее полную энергию  $E$  с минимальным и максимальными значениями  $r$ :

$$E = K + U = \frac{J^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r_{\min}}\right)^2 - \frac{GM_1 M_2}{r_{\min}} = \frac{J^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r_{\max}}\right)^2 - \frac{GM_1 M_2}{r_{\max}}. \quad (74)$$

Из (71) следует, что при  $\varphi = \pi$  и  $\varphi = 0$

$$\frac{1}{r_{\min}} = \frac{1}{se} (1 + e), \quad \frac{1}{r_{\max}} = \frac{1}{se} (1 - e). \quad (75)$$

Подставив (75) в (74) и используя (72), получаем после некоторых алгебраических преобразований следующие соотношения:

$$e = \left( 1 + \frac{2EJ^2}{\mu G^2 M_1^2 M_2^2} \right)^{1/2}, \quad E = -\frac{\mu G M_1^2 M_2^2}{2J^2} (1 - e^2). \quad (76)$$

Заметим, что из (75) следует также

$$\frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}} = e. \quad (77)$$

Эта формула для эксцентриситета эллипса легко запоминается.

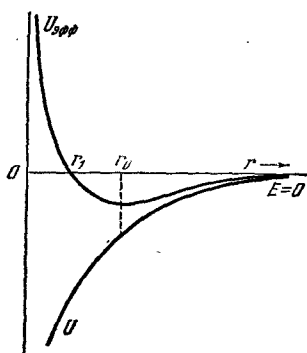


Рис. 9.23. Если  $E=0$ , то  $r_2 = \infty$  и  $e=1$ . Орбита представляет собой параболу.

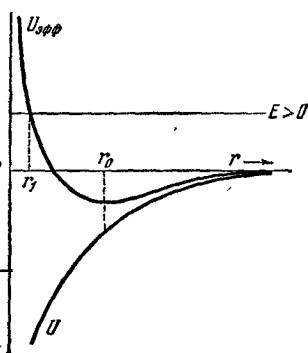


Рис. 9.24. Если  $E > 0$ , то  $e > 1$  и орбита представляет собой гиперболу. Расстояние  $r_1$  называется расстоянием наибольшего приближения.

**Пример. Круговая орбита.** Каково соотношение между полной энергией и моментом импульса для круговой орбиты?

Так как для круговой орбиты  $e=0$ , из (76) следует:

$$E = -\frac{\mu G^2 M_1^2 M_2^2}{2J^2}. \quad (78)$$

Полная энергия отрицательна при условии, что  $U(\infty)=0$ , потому что система в своем движении не выходит за пределы ограниченной области пространства.

Некоторые студенты склонны думать, что все замкнутые орбиты должны быть круговыми. Чтобы понять, что такое эллиптические орбиты, рассмотрим рис. 9.25. На этом рисунке изображено семейство траекторий материальной точки, притягиваемой к началу координат, обозначенному крестиком, с силой, определяющейся по закону обратных квадратов. Это семейство кривых выбрано

так, чтобы все траектории проходили через общую точку  $P$ , в которой скорость перпендикулярна к отрезку прямой, соединяющему  $O$  и  $P$ . Различные орбиты характеризуются различными величинами скорости  $v_p$  в точке  $P$ . Вообще, величину скорости  $v_p$  в этой точке  $P$  удобно выразить так:

$$\frac{v_p}{v_0} = \alpha, \quad (79)$$

где  $v_0$  — скорость на круговой орбите с центром в  $O$ , проходящей через точку  $P$ . Если  $\alpha=1$ , то орбита представляет собой окружность; при  $\alpha < \sqrt{2}$  орбита является эллипсом; при  $\alpha = \sqrt{2}$  орбита

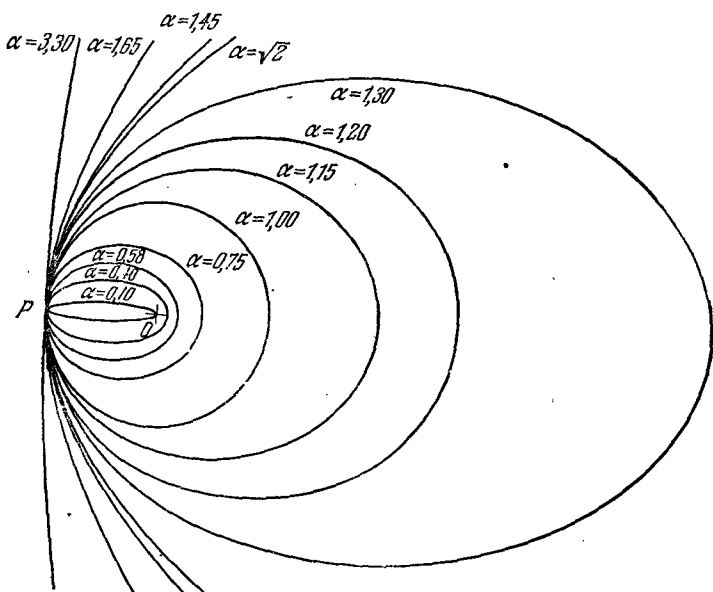


Рис. 9.25. Орбиты, проходящие через общую точку  $P$  и имеющие в этой точке нормаль  $OP$ , где  $O$  — центр действия силы. Если  $v_0$  — скорость на круговой орбите, то параметр  $\alpha$  определяется из следующего равенства:

$$v_p(\alpha) = \alpha v_0.$$

Уравнение (83) показывает, что

$$E(\alpha) = (2 - \alpha^2) E_0.$$

становится параболой, а если  $\alpha > \sqrt{2}$ , то орбита является гиперболой. (Эти результаты становятся ясными при рассмотрении уравнения (83), приводимого ниже.)

Рассчитывая энергию движения, мы можем подтвердить, что переход от замкнутых орбит к открытым совершается при  $\alpha = \sqrt{2}$ .



Полную энергию в точке  $P$  можно выразить следующим соотношением:

$$E = \frac{1}{2} \mu v_P^2 - \frac{B}{r_0} = \frac{1}{2} \mu \alpha^2 v_0^2 - \frac{B}{r_0} = \\ = \frac{1}{2} (\alpha^2 - 1) \mu v_0^2 + \frac{1}{2} \mu v_0^2 - \frac{B}{r_0} = E_0 + \frac{1}{2} (\alpha^2 - 1) \mu v_0^2, \quad (80)$$

где через  $E_0$  и  $v_0$  обозначены соответственно энергия и скорость для движения по круговой орбите;  $B$  — постоянная, равная  $GM_1M_2$ ;  $r_0$  — расстояние между  $P$  и  $O$ . Но для круговой орбиты

$$\frac{\mu v_0^2}{r_0} = \frac{B}{r_0^2}, \quad (81)$$

где левая часть представляет собой произведение массы на центростремительное ускорение, а правая часть — силу тяготения. Используя этот результат, можно переписать выражение для полной энергии движения по круговой орбите таким образом:

$$E_0 = \frac{1}{2} \mu v_0^2 - \frac{B}{r_0} = \frac{1}{2} \mu v_0^2 - \mu v_0^2 = -\frac{1}{2} \mu v_0^2, \quad (82)$$

а уравнение (80) —

$$E = E_0 - (\alpha^2 - 1) E_0 = (2 - \alpha^2) E_0 = (\alpha^2 - 2) |E_0|. \quad (83)$$

Если  $\alpha^2 > 2$ , то полная энергия положительна и орбита является разомкнутой. Если  $\alpha^2 < 2$ , то полная энергия отрицательна и орбита получается замкнутой: в этом случае материальная точка не может удалиться на бесконечно большое расстояние от центра сил.

## 9.9. Законы Кеплера

Одним из величайших экспериментальных открытий в истории науки был установленный Кеплером факт, что орбиты планет являются эллипсами, внутри которых находится Солнце. Эмпирические формулировки законов движения планет, данные Кеплером, послужили исходным экспериментальным материалом для вывода основных законов механики и теории всемирного тяготения. Кеплер сформулировал свои три закона следующим образом:

I. Все планеты движутся по эллиптическим орбитам, причем Солнце находится в одном из фокусов орбиты.

II. Отрезок, соединяющий Солнце с планетой, описывает равные площади за равные промежутки времени.

III. Квадраты периодов обращения нескольких планет вокруг Солнца относятся, как кубы больших полуосей эллипсов. (Эта формулировка является более общей, чем первоначальная формулировка Кеплера.) Здесь мы не учитываем влияния других планет на движение данной планеты.