Полную энергию в точке $P$ можно выразить следующим соотношением:

$$E=\frac{1}{2}\mu v_P^2-\frac{B}{r_0}=\frac{1}{2}\mu\alpha^2 v_O^2-\frac{B}{r_0}=$$

$$=\frac{1}{2}(\alpha^2-1)\mu v_O^2+\frac{1}{2}\mu v_O^2-\frac{B}{r_O}=E_O+\frac{1}{2}(\alpha^2-1)\mu v_O^2, \qquad (80)$$

где через $E_O$ и $v_O$ обозначены соответственно энергия и скорость для движения по круговой орбите; $B$ — постоянная, равная $GM_1M_2$; $r_O$ — расстояние между $P$ и $O$. Но для круговой орбиты

$$\frac{\mu v_O^2}{r_O}=\frac{B}{r_O^2}, \qquad (81)$$

где левая часть представляет собой произведение массы на центростремительное ускорение, а правая часть — силу тяготения. Используя этот результат, можно переписать выражение для полной энергии движения по круговой орбите таким образом:

$$E_O=\frac{1}{2}\mu v_O^2-\frac{B}{r_O}=\frac{1}{2}\mu v_O^2-\mu v_O^2=-\frac{1}{2}\mu v_O^2, \qquad (82)$$

а уравнение (80) —

$$E=E_O-(\alpha^2-1)E_O=(2-\alpha^2)E_O=(\alpha^2-2)\,|E_O|. \qquad (83)$$

Если $\alpha^2>2$, то полная энергия положительна и орбита является разомкнутой. Если $\alpha^2<2$, то полная энергия отрицательна и орбита получается замкнутой: в этом случае материальная точка не может удалиться на бесконечно большое расстояние от центра сил.

## 9.9. Законы Кеплера

Одним из величайших экспериментальных открытий в истории науки был установленный Кеплером факт, что орбиты планет являются эллипсами, внутри которых находится Солнце. Эмпирические формулировки законов движения планет, данные Кеплером, послужили исходным экспериментальным материалом для вывода основных законов механики и теории всемирного тяготения. Кеплер сформулировал свои три закона следующим образом:

I. Все планеты движутся по эллиптическим орбитам, причем Солнце находится в одном из фокусов орбиты.

II. Отрезок, соединяющий Солнце с планетой, описывает равные площади за равные промежутки времени.

III. Квадраты периодов обращения нескольких планет вокруг Солнца относятся, как кубы больших полуосей эллипсов. (Эта формулировка является более общей, чем первоначальная формулировка Кеплера.) Здесь мы не учитываем влияния других планет на движение данной планеты.

Мы только что показали, что замкнутые орбиты являются эллипсами. Второй закон Кеплера был рассмотрен в виде уравнения (65) в гл. 6, где было показано, что он выражает собой просто закон сохранения момента импульса.

Перейдем теперь к выводу третьего закона Кеплера. Если $dS$ — площадь, описываемая за время $dt$ радиусом-вектором, идущим от Солнца к планете, то можно показать, что

$$\frac{dS}{dt}=\frac{J}{2\mu}=\mathrm{const}, \tag{84}$$

где $J$ — момент импульса, а $\mu$ — приведенная масса. Интегрируя уравнение (84) по времени за один период $T$ движения, мы получим

$$S=\frac{JT}{2\mu}, \quad \text{или} \quad T=\frac{2S\mu}{J}=\frac{2\pi ab\mu}{J}, \tag{85}$$

причем $S=\pi ab$ — это площадь эллипса с полуосями $a$ и $b$.

Очевидным свойством эллипса является равенство $2a=r_{\max}+$ $+r_{\min}$; используя формулы (75), получаем

$$2a=\frac{se}{1+e}+\frac{se}{1-e}=\frac{2se}{1-e^2}. \tag{86}$$

Если учесть еще формулы (72), то это равенство принимает следующий вид:

$$2a=\frac{2}{1-e^2}\frac{J^2}{GM_1M_2\mu}. \tag{87}$$

Определяя $T^2$ из уравнения (85) и подставляя $J^2$ из (87), получаем

$$T^2=\frac{(2\pi ab\mu)^2}{aGM_1M_2\mu(1-e)^2}=\frac{4\pi^2ab^2\mu}{GM_1M_2(1-e^2)}. \tag{88}$$

Но эксцентриситет $e$ имеет такое свойство:

$$b^2=a^2(1-e^2), \tag{89}$$

используя которое можно получить из соотношения (88) следующую формулу:

$$\boxed{T^2=\frac{4\pi^2a^3}{G(M_1+M_2)}}. \tag{90}$$

Можно проверить (90) для круговой орбиты; это легко сделать, потому что для круговой орбиты из условия равновесия сил получается, что $\mu\omega^2r=GM_1M_2/r^2$, т. е. произведение $\omega^2r^3$ постоянно.

Подробные данные об орбитах больших планет Солнечной системы приведены в таблице. Обратите внимание, что орбита Земли очень близка к круговой. *Астрономическая единица* длины, по определению, представляет собой полусумму самого длинного и самого короткого расстояний от Земли до Солнца:

$$1\ \text{а.е.}=1{,}495\cdot10^{13}\ \textit{см}.$$

Не следует смешивать эту единицу с парсеком. *Парсек* — это расстояние, на котором длина в одну астрономическую единицу стягивает угол, равный одной угловой секунде:

$$1\ \text{парсек} = 3{,}084 \cdot 10^{18}\ \textit{см}.$$

| Наименование планеты | Длина большой полуоси орбиты, а. е. | Период обращения, *сек* | Эксцентриситет орбиты | Угол наклона орбиты | Масса планеты, *г* |
|---|---|---|---|---|---|
| Меркурий | 0,387 | $7{,}60 \cdot 10^6$ | 0,205 | 7°00′ | $3{,}28 \cdot 10^{26}$ |
| Венера | 0,723 | $1{,}94 \cdot 10^7$ | 0,006 | 3°23′ | $4{,}83 \cdot 10^{27}$ |
| Земля | 1,000 | $3{,}16 \cdot 10^7$ | 0,016 | 0 | $5{,}98 \cdot 10^{27}$ |
| Марс | 1,523 | $5{,}94 \cdot 10^7$ | 0,093 | 1°51′ | $6{,}37 \cdot 10^{26}$ |
| Юпитер | 5,202 | $3{,}74 \cdot 10^8$ | 0,048 | 1°18′ | $1{,}90 \cdot 10^{30}$ |
| Сатурн | 9,554 | $9{,}30 \cdot 10^8$ | 0,055 | 2°29′ | $5{,}67 \cdot 10^{29}$ |
| Уран | 19,218 | $2{,}66 \cdot 10^9$ | 0,046 | 0°46′ | $8{,}80 \cdot 10^{28}$ |
| Нептун | 30,109 | $5{,}20 \cdot 10^9$ | 0,008 | 1°46′ | $1{,}03 \cdot 10^{29}$ |
| Плутон | 39,60 | $7{,}82 \cdot 10^9$ | 0,246 | 17°7′ | $5{,}4 \cdot 10^{27}$ |

Расстояние от ближайшей звезды до Солнца равно 1,31 парсека. Угол наклона орбиты в пятом столбце таблицы — это угол между плоскостью орбиты планеты и плоскостью орбиты Земли (эклиптикой).

Для проверки третьего закона Кеплера сравним орбиту Урана с орбитой Земли. Куб отношения длин больших полуосей равен

$$\left(\frac{19{,}22}{1}\right)^3 \approx 71{,}0 \cdot 10^2, \quad (91)$$

а квадрат отношения периодов обращения равен

$$(84{,}2)^2 \approx 70{,}9 \cdot 10^2, \quad (92)$$

т. е. эти числа довольно точно совпадают. Все это было рассчитано с помощью обычной логарифмической линейки. Произведите такой же расчет, сравнивая, например, орбиту Меркурия с орбитой Земли.

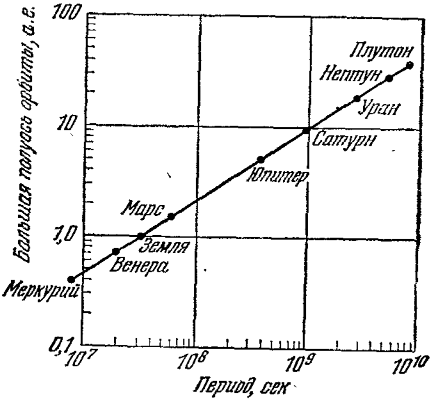


Рис. 9.26. По наклону прямой линии можно легко определить, что период обращения $T$ изменяется пропорционально $a^{3/2}$.

На рис. 9.26 данные для планет нанесены на график с логарифмическим масштабом по обеим осям. В таком двойном логарифмическом масштабе любая степенная зависимость выражается прямой линией; угловой коэффициент этой прямой равен показателю в степени в формуле этой зависимости.

Ньютон проверил третий закон Кеплера также по наблюденным величинам периода обращения четырех самых больших спутников Юпитера и обнаружил очень хорошее совпадение.

**Задачи**

1. *Приведенная масса.* Основную частоту колебаний двухатомной молекулы можно выразить следующей формулой:

$$\omega=\left(\frac{C}{\mu}\right)^{1/2},$$

где $C$, по аналогии с макроскопической пружиной, представляет собой силовую постоянную, а $\mu$ — приведенная масса двух атомов. Колебательная частота молекулы окиси углерода CO равна $\omega \approx 0{,}6 \cdot 10^{-15}$ *сек*$^{-1}$.

а) Рассчитать $\mu$ в граммах по значениям атомных масс.

Ответ. $1 \cdot 10^{-23}$ *г.*

б) Рассчитать силовую постоянную для растяжения этой молекулы.

Ответ. $4 \cdot 10^{6}$ *дин/см.*

2. *Гравитационное притяжение к нити бесконечной длины.* Доказать, что на массу $M_1$, находящуюся на расстоянии $R$ от бесконечной прямолинейной нити с плотностью $\rho$ на единицу длины, действует сила тяготения $2G\rho M_1/R$ (обратите внимание на направление силы, действующей со стороны элемента длины).

3. *Гравитационное притяжение к нити конечной длины.* Рассматривается точка с абсциссой $x$, находящаяся на перпендикуляре к середине прямолинейной нити, имеющей длину $2L$. Масса нити равна $M$; начало системы координат находится в одной из точек нити.

а) Найти выражение для потенциальной энергии, обращающейся в нуль при $x \to \infty$.

Ответ. $-(GMm/L)\ln\left\{[L+(x^2+L^2)^{1/2}]/x\right\}$.

б) Найти выражение для силы тяготения, с которой эта нить действует на материальную точку с массой $m$, имеющую абсциссу $x$.

в) Доказать, что результат, полученный в а), переходит в $U \approx -GMm/L$, когда $x \gg L$. В качестве примера рассмотреть проволоку длиной 2 *м*, имеющую плотность на единицу длины 2 *г/см*.

г) Какова величина (в динах) силы тяготения, с которой эта проволока действует на материальную точку с массой $M=0{,}5$ *г*, находящуюся на расстоянии 3 *м* от середины проволоки по ее продольной оси?

Ответ. $1{,}7 \cdot 10^{-10}$ *дин.*

д) Какова потенциальная энергия (в эргах) этой материальной точки в силовом поле проволоки в положении, заданном в а)?

Ответ. $-4{,}6 \cdot 10^{-8}$ *эрг.*

4. *Сила, величина которой обратно пропорциональна расстоянию в степени 2,1.* Найти потенциальную энергию пробной частицы с массой $M_1$, находящейся *внутри* шарового слоя радиусом $R$ на расстоянии $r$ от его центра. Масса слоя равна $4\pi\sigma R^2$. Предполагается, что между двумя материальными точками с массами $M_1$ и $M_2$ действует сила

$$F=-G'\frac{M_1M_2}{r^{2,1}},$$

где $G'$ — постоянная. Такой закон действия сил неизвестен в физике; заметьте, насколько результат расчета чувствителен к отклонению показателя степени при $r$ от величины 2,0.

5. *Гравитационная потенциальная энергия группы звезд.* Найти величину взаимной гравитационной энергии (в эргах) системы восьми звезд, каждая из которых имеет массу, равную массе Солнца, и расположена в одной из вершин куба с длиной ребра 1 парсек (собственную энергию каждой звезды не учитывать).

Ответ. $2 \cdot 10^{42}$ *г·см²/сек².*

6. *Ускорение силы тяжести на поверхности звезды — белого карлика.* Рассмотрим звезду белый карлик с массой, равной массе Солнца, и радиусом, равным 0,02 радиуса Солнца. Эти данные приближенно характеризуют наиболее

известный белый карлик, Сириус B, являющийся одним из компонентов Сириуса — самой яркой звезды небесного свода (рис. 9.27). Предполагают, что белые карлики представляют собой конечные продукты цикла эволюции звезд.

а) Какую величину имеет g, ускорение силы тяжести, на поверхности Сириуса B?

б) Какова плотность Сириуса B?

Ответ. $2\cdot 10^5$ *г/см³*.

7. *Орбитальное движение двойных звезд.* Наиболее массивная звезда, известная в настоящее время,— это звезда Дж. С. Пласкета. Она является двойной звездой *), т. е. состоит из двух звезд, связанных между собой силой тяготения. Из спектральных исследований известно:

а) Период обращения этих звезд вокруг их центра масс равен 14,4 суток ($1{,}2\cdot 10^6$ *сек*).

б) Скорость движения каждого из компонентов — около 220 *км/сек*. Поскольку скорости обоих компонентов почти равны по величине (но противоположны по направлению), мы можем предположить, что они отстоят на равных расстояниях от центра масс и, следовательно, их массы почти равны.

в) Их орбиты почти круговые.

По этим данным рассчитать приведенную массу и расстояние между двумя компонентами.

Ответ. $\mu\approx 0{,}6\cdot 10^{35}$ *г*; расстояние $\approx 0{,}8\cdot 10^{13}$ *см*.

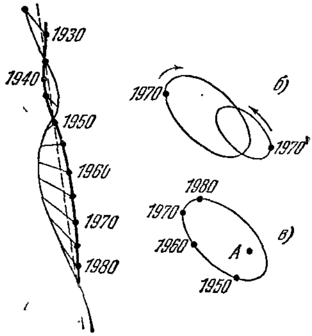


Рис. 9.27. Визуально наблюдаемые траектории звезд – компонентов Сириуса. *а*) Жирная кривая показывает синусоидальное движение главной звезды, тонкая кривая соответствует синусоидальному движению сопутствующего ей белого карлика, а пунктирной кривой изображено движение центра масс системы. *б*) Орбиты движения обоих компонентов вокруг их общего центра масс. *в*) Орбита движения сопутствующей звезды вокруг главной. *(По книге Струве, Линдса и Пилланса)*

8. *Движение внутри галактики.* Рассмотрим однородное сферическое распределение звезд в галактике с общей массой $M$ и радиусом $R_0$. Звезда с массой $M_{зв}$, находящаяся на расстоянии $r<R_0$ от центра галактики, будет двигаться под действием центральной силы, величина которой зависит от массы, заключенной внутри сферы радиусом $r$.

а) *Какая сила действует на расстоянии r?*

б) Какова скорость звезды, если она движется вокруг центра галактики по круговой орбите?

9. *Соотношения для эллиптических орбит.* а) Доказать, что момент импульса планеты, движущейся по эллиптической орбите, проходящей через точку $P$ (см. текст, предшествующий уравнению (79)), равен $J=\alpha J_0$, где $J_0$ относится к круговой орбите, проходящей через точку $P$, а $\alpha$ определяется из уравнения (79).

б) Доказать, что эксцентриситет орбиты равен

$$e=|\alpha^2-1|.$$

10. *Движение карликовой галактики.* Недавно было найдено, что наша Галактика окружена несколькими (не менее шести) очень маленькими карликовыми галактиками. Их малая масса, близость к нашей Галактике и малые скорости относительно нее (измеренные скорости некоторых из галактик — менее $10^7$ *см/сек*) наводят на мысль, что эти галактики гравитационно связаны с нашей звездной системой. Одна из этих галактик — это так называемая система в созвездии Скульптора. На основании измерений по некоторым ее переменным звездам было найдено, что расстояние этой системы от центра нашей Галактики составляет около $2\cdot 10^{23}$ *см*. Общая масса галактики в созвездии Скульптора, приближенно рассчитанная по ее светимости, в $3\cdot 10^6$ раз больше массы Солнца. Величина массы нашей

*) Хороший обзор по двойным звездам см. в книге: O. Struve, B. Linds, Pillans, Elementary Astronomy, Oxford Univ. Press, New York, 1959. Из пятидесяти ближайших к Солнцу звезд по крайней мере половину составляют двойные или множественные звезды.

Галактики оценивается приближенно в $4 \cdot 10^{11}$ масс Солнца. Предположите, что система в созвездии Скульптора обращается вокруг нашей Галактики по круговой орбите.

а) Рассчитайте период ее обращения.

б) Определите скорость движения по орбите.

в) Рассчитайте относительное ускорение карликовой галактики.

11. *Орбиты метеоритов.* Метеориты — это малые тела, движущиеся в межпланетном пространстве по замкнутым орбитам вокруг Солнца. Иногда они сталкиваются с атмосферой Земли, образуя метеоры, видимые на высоте до $10^7$ *см* над земной поверхностью и имеющие скорость от $1{,}1 \cdot 10^6$ до $7{,}5 \cdot 10^6$ *см/сек*. Орбита метеорита остается замкнутой, если его скорость в данной точке меньше, чем скорость $v_{\max}$, необходимая для преодоления солнечного притяжения, когда метеорит находится на расстоянии $R$ от Солнца:

$$v_{\max}=\left(\frac{2GM_{\text{С}}}{R}\right)^{1/2}.$$

Мы пренебрегаем трением, а также притяжением метеорита к Земле. Чему равна скорость $v_{\max}$, соответствующая какой-либо точке на орбите Земли?

12. *Гравитационное давление в центре Земли.* Рассмотрим однородную сферическую массу, находящуюся в гидростатическом равновесии. Радиус ее $R$, а плотность равна $\rho$.

а) Доказать, что давление на расстоянии $r$ от центра этой массы равно

$$p=\frac{2\pi}{3}\rho^2 G\,(R^2-r^2).$$

б) Рассчитать давление в центре Земли, приняв ее радиус равным $R=6{,}3 \cdot 10^8$ *см*, а плотность — постоянной и равной $\rho=5{,}5$ *г/см*$^3$.

Ответ. $1{,}7 \cdot 10^{12}$ *дин/см*$^2$.

13. *Измерение G.* Можно произвести очень чувствительные измерения, пользуясь кварцевыми нитями. Прочность нити на разрыв изменяется пропорционально квадрату ее радиуса, а упругая постоянная кручения пропорциональна четвертой степени радиуса. Поэтому желательно применять нити малого радиуса, если мы хотим добиться такой высокой чувствительности, которая достигается с малыми значениями постоянной кручения. Постоянная кручения, по определению, равна крутящему моменту, приходящемуся на один радиан, т. е. $N=-K\varphi$, где $N$ — крутящий момент. Нередко в приборах применяются кварцевые нити с постоянной $K$ в интервале 0,01—1 *дин·см/рад*. Применение зеркал и электронных систем дает возможность в исключительных условиях измерять углы поворота величиной вплоть до $10^{-8}$ *рад*. Задав для всех необходимых величин разумный порядок их числовых значений, составьте схему лабораторного прибора для измерения гравитационной постоянной $G$. (Не ожидайте, что удастся довести точность до $10^{-8}$*рад*!) Упругая постоянная кручения имеет следующий порядок величины:

$$-K \approx \frac{10^{11}R^4}{L}\ \text{дин·см/рад},$$

где $R$ и $L$ — соответственно радиус и длина кварцевой нити (в *см*).

14. *Источники энергии звезд.* По интенсивности излучения Солнца было определено, что суммарная отдача им энергии равна $4 \cdot 10^{33}$ *эрг/сек*. Предположим, что Солнце отдавало энергию с этой скоростью в течение $Y$ лет, прошедших с того момента, как началось его сжатие. Половина гравитационной потенциальной энергии Солнца перешла в кинетическую энергию составляющих его молекул (согласно теореме о вириале), а другая половина — в энергию излучения. Доказать, что $Y \approx 3 \cdot 10^7$ лет. Результат, полученный для $Y$, слишком мал, если сравнить его с известным возрастом Солнца $5 \cdot 10^9$ лет. (Предполагается, что возраст Солнца по крайней мере равен возрасту Земли.) Значительно бóльшим источником энергии излучения Солнца является ядерная, а не гравитационная энергия.

15. *Планковская длина.* Показать, что можно так скомбинировать гравитационную постоянную $G$, скорость света $c$ и постоянную Планка $h$ (размерность —

энергия, помноженная на время), чтобы получилась величина, имеющая размерность длины. Каков порядок величины этой длины? Ее иногда называют планковской длиной, а ее значение пока остается в какой-то степени умозрительным.

16. *Шаровые скопления звезд* (рис. 9.28). Шаровое скопление звезд — это группа примерно из $10^9$ звезд, распределенных внутри сферы диаметром порядка 40 парсек.

а) Если звезды равномерно распределены по объему скопления, то какое их количество приходится в среднем на кубический парсек?

б) Каков порядок величины собственной гравитационной энергии шарового скопления звезд? Принять среднюю массу звезды равной массе Солнца. (При расчете собственной гравитационной энергии скопления звезд исключить собственную гравитационную энергию отдельных звезд.)

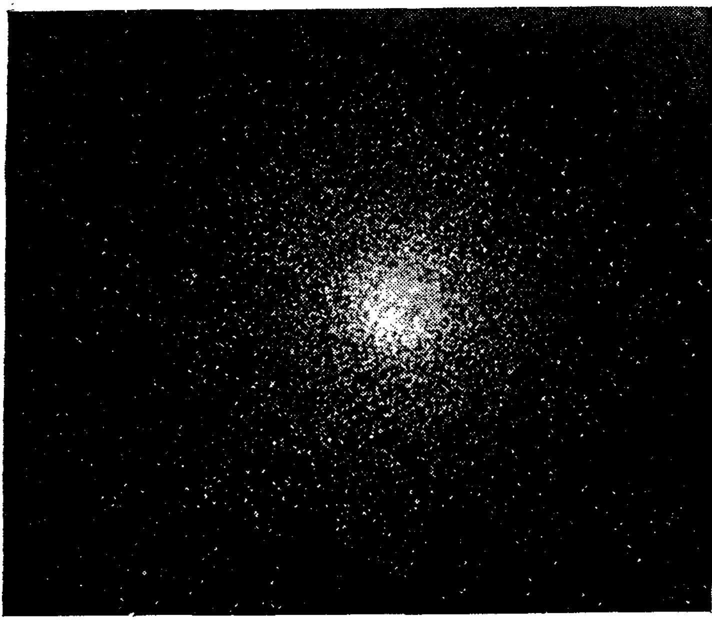

Рис. 9.28. Шаровое скопление звезд М3. *(Фото Ликской обсерватории)*

17. *Форма поверхности моря на однородной Земле.* Представим себе, что Земля — это однородный шар, полностью покрытый водой, плотность которой $\rho=1$. При вращении Земли с угловой скоростью $\omega$ поверхность воды, покрывающей ее (поверхность уровня моря), принимает форму сплюснутого сфероида. Найти приближенное выражение для разности глубин моря на полюсе и на экваторе, предполагая, что поверхность уровня моря является поверхностью постоянной потенциальной энергии (на чем основано это предположение?). Гравитационное притяжение частиц воды друг к другу не учитывать.

Указание. На равных расстояниях $r$ от центра Земли силы тяготения $F(r)$, действующие на единицу массы на полюсе и на экваторе, одинаковы, но вследствие вращения Земли на экваторе на эту же массу действует еще центробежная сила инерции, равная $-\omega^2 r$, так что результирующая сила равна

$$F_{\text{экв}}=F_{\text{пол}}(r)-\omega^2 r,$$

а потенциальная энергия единицы массы равна (при условии, что в центре Земли потенциальная энергия равна нулю)

$$U_{\text{экв}}(r)=U_{\text{пол}}(r)+\frac{1}{2}\omega^2r^2,$$

где $U_{\text{экв}}(r)$ и $U_{\text{пол}}(r)$ — значения потенциальной энергии соответственно на экваторе и на полюсе. Пусть величины деформации поверхности уровня моря по сравнению с ее шаровой формой радиуса $R_З$ равны соответственно $D_{\text{экв}}$ и $D_{\text{пол}}$. Так как

$$U_{\text{экв}}(R_З+D_{\text{экв}})=U_{\text{пол}}(R_З+D_{\text{пол}}),$$

то для решения надо доказать, что

$$g(D_{\text{экв}}-D_{\text{пол}})\cong\frac{1}{2}\omega^2R_З^2,$$

где $g$ — имеет обычное значение. Из этого приближенного равенства следует:

$$\frac{D_{\text{экв}}-D_{\text{пол}}}{R_З}\cong\frac{\omega^2R_З}{g}\cong\frac{3,4}{980}=\frac{1}{288}.$$

Это очень близко к $\frac{1}{298,4}$ — величине, измеренной для фактической формы поверхности Земли.

18. *Причина приливов и отливов.* Разберем причину приливов и отливов. Основной приливообразующей силой является разность между силой притяжения Луны, действующей на воду океана, и силой ее притяжения, действующей на саму Землю. Более подробное объяснение причины приливов и отливов можно прочесть в элементарном курсе астрономии. На основе этого объяснения дайте правильный ответ на следующий вопрос:

Почему приливы одновременно происходят в двух точках Земли, из которых одна ближе всего к Луне, а другая находится на противоположной стороне Земли? Иными словами, почему приливы происходят не один, а два раза в сутки?

## Дополнение 1. **Теорема о вириале**

Выше мы привели без доказательства следующий важный вывод: *невозможно устойчивое равновесие системы материальных точек, взаимодействующих по закону обратных квадратов.* Это означает, что в системе, где действуют только силы, величина которых определяется законом обратных квадратов, состояние с кинетической энергией, равной нулю, не может быть устойчивым. Этот вывод относится как к электронам в атоме, так и к атомам в звезде или к звездам в галактике. Из него следует, что окружающая нас материя должна во всех своих формах состоять из движущихся тел и только в каком-то среднем, относительном смысле мы можем считать определенную ее часть неподвижной.

Мы можем встретиться с *установившимся состоянием*, где в среднем не происходят значительные изменения, но не со *статическим состоянием*, где вообще нет движения.

Применение *теоремы о вириале* *) дает нам возможность определить среднюю (за большой промежуток времени) величину кинетической энергии системы частиц, движущихся в ограниченной области пространства под влиянием сил, действующих по закону обратных квадратов:

$$\langle\text{кинетическая энергия}\rangle=-\frac{1}{2}\langle\text{потенциальная энергия}\rangle, \tag{93}$$

*) Область применения теоремы о вириале не ограничивается силами, действующими по закону обратных квадратов. Однако только для сил, подчиняющихся закону обратных квадратов, коэффициент в правой части уравнения (93) равен —1/2.