

## Дополнение 2. Числовой расчет орбиты

Приводимый пример взят дословно из лекций Р. Фейнмана по общей физике \*). Эти лекции одного из крупнейших физиков-теоретиков нашего времени отличаются глубоким содержанием, оригинальностью и занимательностью. Их чтение доставит удовольствие студенту.

«...Но можно ли таким же путем вычислять движение планеты вокруг Солнца? Давайте посмотрим, можно ли при некоторых приближениях получить эллиптическую орбиту. Предположим, что Солнце бесконечно тяжелое в том смысле, что его движение не будет приниматься в расчет.

Допустим, что в известной точке планета начала свое движение и имеет определенную скорость. Она движется вокруг Солнца по какой-то кривой, и мы попытаемся определить с помощью уравнений движения Ньютона и его же закона всемирного тяготения, что это за кривая. Как это сделать? В некоторый момент времени планета находится в каком-то определенном месте, на расстоянии  $r$  от Солнца; в этом случае известно, что на нее действует сила, направленная по прямой к Солнцу, которая, согласно закону тяготения, равна определенной постоянной, умноженной на произведение масс планеты и Солнца и деленной на квадрат расстояния между ними. Чтобы рассуждать дальше, нужно выяснить, какое ускорение вызывает эта сила.

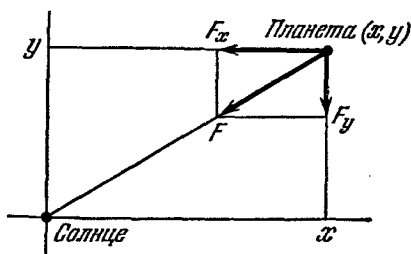


Рис. 9.30. Сила притяжения, действующая на планету.

Однако, в отличие от предыдущей задачи, нам потребуются теперь *компоненты* ускорения в двух направлениях, которые мы назовем  $x$  и  $y$ . Положение планеты в данный момент будет определяться координатами  $x$  и  $y$ , поскольку третья координата  $z$  всегда равна нулю.

Действительно, координатная плоскость  $xy$  выбрана нами таким образом, что  $z$ -компоненты как силы, так и начальной скорости равны нулю, а поэтому нет никаких причин, которые бы заставили планету выйти из этой плоскости. Сила при этом будет направлена по линии, соединяющей планету с Солнцем, как это показано на рис. 9.30.

Из этого рисунка видно, что горизонтальная компонента силы так относится к полной ее величине, как координата  $x$  относится к расстоянию  $r$ . Это сразу следует из подобия треугольников. Кроме того, если  $x$  положительна, то  $F_x$  отрицательна, и наоборот.

Таким образом,  $F_x/|F| = -x/r$ , или  $F_x = -|F| \cdot x/r = -GMmx/r^3$  и соответственно  $F_y = -GMmy/r^3$ . Теперь можно воспользоваться динамическими законами и написать, что  $x$ - или  $y$ -компонента ускорения, умноженная на массу планеты, равна соответственно  $x$ - или  $y$ -компоненте силы:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{GMmx}{r^3}, \\ m \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{GMmy}{r^3}, \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned} \right\} \quad (129)$$

Это именно та система уравнений, которую мы должны решить. Для того чтобы упростить вычисления, предположим, что либо единицы измерения времени или массы выбраны соответствующим образом, либо нам просто повезло, словом, получилось так, что  $GM \equiv 1$ . Для нашего случая предположим, что в начальный момент  $t=0$  планета находилась в точке с координатами  $x=0,500$  и  $y=0,000$ , а скорость

\*) Русский перевод: Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс, Фейнмановские лекции по физике, вып. 1, «Мир», 1965, стр. 167—173. (Прим. ред.)

ее в этот момент была направлена параллельно оси  $y$  и равна 1,6300. Как же в этом случае делаются расчеты? Снова составляется таблица со столбцами для времени  $t$ , координаты  $x$ ,  $x$ -компонент скорости  $v_x$  и ускорения  $a_x$ . Затем идут отдельные чертой три колонки: для координаты  $y$ ,  $y$ -компонент скорости и ускорения. Однако для того, чтобы подсчитать ускорение, мы должны воспользоваться уравнениями (129), согласно которым его компоненты равны  $-x/r^3$  и  $-y/r^3$ , а  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Так что, получив  $x$  и  $y$ , мы должны где-то в сторонке провести небольшие вычисления — извлечь квадратный корень из суммы квадратов и получить расстояние. Удобно также отдельно вычислить и  $1/r^3$ .

После этого все готово, чтобы определить компоненты ускорения. Всю эту работу можно сильно облегчить, если пользоваться таблицами квадратов, кубов и обратных величин. На нашу долю останется тогда только умножение  $x$  на  $1/r^3$ , которое легко выполняется на логарифмической линейке.

Перейдем к дальнейшему. Возьмем интервал времени  $\varepsilon = 0,100$ . В начальный момент  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} x(0) &= 0,500, & y(0) &= 0,000, \\ v_x(0) &= 0,000, & v_y(0) &= +1,630. \end{aligned}$$

Отсюда находим:

$$\begin{aligned} r(0) &= 0,500, & 1/r^3 &= 8,000, \\ a_x &= -4,000, & a_y &= 0,000. \end{aligned}$$

После этого можно вычислять компоненты  $v_x(0,05)$  и  $v_y(0,05)$ :

$$\begin{aligned} v_x(0,05) &= 0,000 - 4,000 \cdot 0,050 = -0,200, \\ v_y(0,05) &= 1,630 + 0,000 \cdot 0,050 = 1,630. \end{aligned}$$

А теперь начнем наш основной расчет:

$$\begin{aligned} x(0,1) &= 0,500 - 0,200 \cdot 0,1 = 0,480, \\ y(0,1) &= 0,000 + 1,630 \cdot 0,1 = 0,163, \\ r &= \sqrt{(0,480)^2 + (0,163)^2} = 0,507, \\ \frac{1}{r^3} &= 7,67, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_x(0,1) &= -0,480 \cdot 7,67 = -3,68, \\ a_y(0,1) &= -0,163 \cdot 7,67 = -1,250, \\ v_x(0,15) &= -0,200 - 3,68 \cdot 0,1 = -0,568, \\ v_y(0,15) &= 1,630 - 1,26 \cdot 0,1 = 1,505, \\ x(0,2) &= 0,480 - 0,568 \cdot 0,1 = 0,423, \\ y(0,2) &= 0,163 + 1,50 \cdot 0,1 = 0,313 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

В результате мы получим числа, приведенные в таблице, где приблизительно в 20 точках прослежена половина пути нашей планеты вокруг Солнца. На рис. 9.31

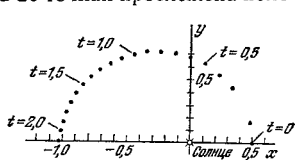


Рис. 9.31. Результаты расчета движения планеты вокруг Солнца.

отложены координаты планеты  $x$  и  $y$ , приведенные в таблице. Точки представляют собой последовательные положения планеты через каждую десятую долю выбранной нами единицы времени. Видно, что сначала она двигалась быстро, а затем — все медленней и медленней. Видна также и форма кривой движения планеты. Итак, вы теперь знаете, как практически можно вычислять движение планет!

Давайте посмотрим теперь, как вычислить движение Нептуна, Юпитера, Урана и остальных планет. Можно ли сделать подобные расчеты для большого числа планет, учитывая к тому же и движение Солнца? Разумеется можно. Найдем сначала силу, действующую на каждую планету, например на ту, которую мы обозначили номером  $i$  и координаты которой  $x_i$ ,  $y_i$  и  $z_i$  ( $i=1$  может означать Солнце,  $i=2$  — Меркурий,  $i=3$  — Венеру и т. д.). Наша задача — найти координаты всех планет. По закону тяготения  $x$ -компонента силы,

### Определение пути планеты вокруг Солнца

Решение системы уравнений  $dv_x/dt = -x/r^3$ ,  $dv_y/dt = -y/r^3$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Интервал  $\varepsilon = 0,100$ .

При  $t=0$   $v_y = 1,63$ ,  $v_x = 0$ ,  $x = 0,5$ ,  $y = 0$ .

$t$	$x$	$v_x$	$a_x$	$y$	$v_y$	$a_y$	$r$	$1/r^3$
0,0	0,500	-0,200	-4,00	0,000	1,630	0,00	0,500	8,000
0,1	0,480	-0,568	-3,68	0,163	1,505	-1,25	0,507	7,675
0,2	0,423	-0,859	-2,91	0,313	1,290	-2,15	0,526	6,873
0,3	0,337	-1,055	-1,96	0,442	1,033	-2,57	0,556	5,824
0,4	0,232	-1,166	-1,11	0,545	0,771	-2,62	0,592	4,81
0,5	0,115	-1,211	-0,453	0,622	0,526	-2,45	0,633	3,942
0,6	-0,006	-1,209	+0,020	0,675	0,306	-2,20	0,675	3,252
0,7	-0,127	-1,175	+0,344	0,706	0,115	-1,91	0,717	2,712
0,8	-0,245	-1,119	+0,562	0,718	-0,049	-1,64	0,758	2,296
0,9	-0,357	-1,048	+0,705	0,713	-0,190	-1,41	0,797	1,975
1,0	-0,462	-0,968	+0,796	0,694	-0,310	-1,20	0,834	1,723
1,1	-0,559	-0,882	+0,858	0,663	-0,412	-1,02	0,867	1,535
1,2	-0,647	-0,792	+0,90	0,622	-0,499	-0,86	0,897	1,385
1,3	-0,726	-0,700	+0,92	0,572	-0,570	-0,72	0,924	1,267
1,4	-0,796	-0,607	+0,93	0,515	-0,630	-0,60	0,948	1,173
1,5	-0,857	-0,513	+0,94	0,452	-0,680	-0,50	0,969	1,099
1,6	-0,908	-0,418	+0,95	0,384	-0,720	-0,40	0,986	1,043
1,7	-0,950	-0,323	+0,95	0,312	-0,751	-0,31	1,000	1,000
1,8	-0,982	-0,228	+0,95	0,237	-0,773	-0,23	1,010	0,970
1,9	-1,005	-0,113	+0,95	0,160	-0,778	-0,15	1,018	0,948
2,0	-1,018	-0,037	+0,96	0,081	-0,796	-0,08	1,021	0,939
2,1	-1,022	+0,058	+0,95	0,001	-0,796	0,00	1,022	0,936
2,2	-1,016		+0,96	-0,079	-0,789	+0,07	1,019	0,945
2,3								

Ось  $x$  пересекается в момент 2,101 сек, период обращения равен 4,20 сек. В момент 2,086 сек компонента скорости  $v_x=0$ . Орбита пересекается с осью  $x$  при  $x=1,022$ , длина большой полуоси равна  $\frac{1,022+0,500}{2} = 0,761$ ,  $v_y = 0,796$ . Предсказываемое время полуоборота равно  $\pi (0,761)^{3/2} = 0,663\pi = 2,082$ .

действующая на  $i$ -ю планету со стороны планеты номер  $j$  с координатами  $x_j, y_j$  и  $z_j$ , будет равна  $-Gm_i m_j (x_i - x_j)/r_{ij}^3$ . Если же учесть силы со стороны всех планет, то получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} m_i \frac{dv_{ix}}{dt} &= \sum_{j=1}^N ' \left[ -\frac{Gm_i m_j (x_i - x_j)}{r_{ij}^3} \right], \\ m_i \frac{dv_{iy}}{dt} &= \sum_{j=1}^N ' \left[ -\frac{Gm_i m_j (y_i - y_j)}{r_{ij}^3} \right], \\ m_i \frac{dv_{iz}}{dt} &= \sum_{j=1}^N ' \left[ -\frac{Gm_i m_j (z_i - z_j)}{r_{ij}^3} \right], \end{aligned} \right\} \quad (130)$$

где  $r_{ij}$  — расстояние между  $i$ -й и  $j$ -й планетами:

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}, \quad (131)$$

а  $\Sigma'$  означает суммирование по всем остальным планетам, т. е. по всем значениям  $j$ , за исключением, конечно,  $j=i$ . Таким образом, чтобы решить это уравнение, нужно лишь значительно увеличить количество столбцов в нашей таблице. Для движения Юпитера понадобится девять столбцов, для Сатурна — тоже девять и т. п. Если нам заданы все начальные положения и скорости, то из уравнений (130) можно подсчитать все ускорения, вычислив, конечно, предварительно по формуле (131) все расстояния  $r_{ij}$ . А сколько же времени потребуется на все эти вычисления? Если вы будете делать их сами дома, то очень много! Однако сейчас уже имеются машины, чрезвычайно быстро выполняющие все арифметические расчеты. Сложение, например, такая машина выполняет за 1 мксек, т. е. за одну миллионную долю секунды, а умножение — за 10 мксек. Так что если один цикл расчетов состоит из 30 операций умножения, то это займет всего лишь 300 мксек, или за 1 сек можно сделать 3000 циклов. Если мы хотим считать с точностью до одной миллиардной, то для того, чтобы покрыть все время обращения планеты вокруг Солнца, требуется  $4 \cdot 10^6$  циклов. (Оказывается, что ошибка в расчетах приблизительно пропорциональна квадрату  $\epsilon$ . Если брать интервал в тысячу раз меньший, то ошибка уменьшится в миллион раз. Так что для обеспечения нашей точности нужно взять интервал в 10 000 раз меньше.) На машине это займет 130 сек, или около 2 мин. Всего лишь 2 мин для того, чтобы «прогнать» Юпитер вокруг Солнца и при этом еще с точностью до одной миллиардной учесть все возмущения от других планет!

Итак, в начале этой главы для вас были загадкой движения грузика на пружинке, однако теперь, вооруженные таким мощным орудием, как законы Ньютона, вы можете вычислять не только такие простые явления, как качание грузика, но и чрезвычайно сложные движения планет, причем с любой желаемой точностью! Нужна только машина, знающая арифметику».