

# ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ

## К главе 1

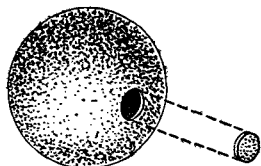
**1.23. Энергия системы зарядов.** Рассмотрите следующую конфигурацию зарядов: единичный положительный заряд находится в центре круга, а  $N$  единичных отрицательных зарядов расположены на равном расстоянии друг от друга по окружности. Что произойдет с зарядами, если их предоставить самим себе? Разлетятся они в разные стороны или соберутся в центре круга? Ответьте на этот вопрос, вычислив энергию системы при  $N=3, 4$  и  $5$ , и покажите, по крайней мере для одного случая, что вы получите тот же ответ, вычисляя результирующую силу, действующую на один из отрицательных зарядов.

**1.24. Заряженные капли жидкости.** Капля воды радиусом  $R$  несет электрический заряд  $Q$ , распределенный по ее поверхности. Разделим эту каплю на две капли одинакового размера, поровну поделим между ними электрический заряд и разведем их на большое расстояние друг от друга. Увеличится или уменьшится при этом электрическая потенциальная энергия? На сколько? Теперь рассмотрим энергию, связанную с наличием у жидкости поверхности и ответственную за «поверхностное натяжение». Благодаря этому натяжению капля сохраняет свою сферическую форму. Из-за межмолекулярных связей для образования новой поверхности требуется некоторое количество энергии, причем при данной температуре энергия, затрачиваемая на создание единицы площади поверхности, является постоянной величиной. Для воды она составляет примерно  $50 \text{ эрг/см}^2$ . Предположим, что капля, которую мы делим на две, имеет радиус  $10^{-2} \text{ см}$ . Какова должна быть величина заряда капли для того, чтобы изменение электрической энергии возместило расход энергии, идущей на преодоление межмолекулярных связей? Чтобы понять, велик ли этот заряд, найдите величину создаваемого им электрического поля на поверхности капли. (Поле, равное  $100 \text{ ед. СГСЭ/см}$ , является сравнительно большой величиной, поддерживать такое поле в воздухе достаточно трудно.)

**1.25.** Обдумайте и обсудите нашу «трудность точечного заряда», которая может быть выражена следующим образом: идеальный точечный заряд обладает бесконечно большой потенциальной энергией, или «собственной» энергией. Однако мы всегда пренебрегаем ею, когда подсчитываем энергию системы точечных зарядов. Действительно, любую энергию, всегда сохраняющую постоянное значение, можно безболезненно отбросить, но какой физический смысл содержится в понятии постоянства бесконечно большого количества энергии? Элементарная частица, размеры которой наиболее близки к размерам точечного заряда, не обладает бесконечно большой энергией. И поскольку она имеет конечные размеры, можно ожидать, что электрические поля, создаваемые другими источниками, имеют некоторое влияние на ее структуру. Это означает, однако, что электрическая собственная энергия системы зарядов не является одинаковой в различном окружении. В каких же случаях, по вашему мнению, следует действительно учитывать это обстоятельство?

**1.26. Применение принципа суперпозиции.** На рисунке изображена сферическая заряженная оболочка радиусом  $a$  (с поверхностной плотностью  $\sigma$ ), из которой

вырезан маленький кружок радиусом  $b \ll a$ . Каковы направление и величина поля в центре отверстия? Получить ответ можно двумя путями. Во-первых, для получения суммы вкладов всех элементов заряда в поле центральной точки можно взять интеграл по оставшемуся распределению зарядов. Во-вторых, вспомнив принцип суперпозиции, вы можете поставить удаленный кружок, являющийся практически маленьким диском, на место и проверить, какой это даст эффект. Обратите внимание на связь этого результата с вышеприведенным рассмотрением силы, действующей на поверхностный заряд,— может быть, это будет третьим способом получения ответа.



К задаче 1.26.

1.27. Простое применение принципа суперпозиции и соображений симметрии позволит вам установить следующий любопытный факт. Пусть поверхность полукруглой чаши заряжена с однородной плотностью. Мы утверждаем, что в каждой точке воображаемой поверхности, которая стянула бы чашу как кожа на барабанае, электрическое поле перпендикулярно к этой поверхности.

1.28. Человек, придумывающий задачи, которые можно решить, используя принципы симметрии и суперпозиции, знает больше, чем человек, решающий их. Попробуйте придумать такую задачу.

1.29. Сила, действующая на составной заряженный лист. Два параллельных заряженных листа с плотностями  $\sigma_A$  и  $\sigma_B$  ед. СГСЭ  $q/cm^2$  соответственно расположены на расстоянии  $s$  друг от друга. Лист  $A$  расположен слева от листа  $B$ , если смотреть на них сбоку. Обозначим через  $E_1$  электрическое поле слева от листа  $A$ , через  $E_2$  поле между листами и через  $E_3$  поле справа от листа  $B$ . Это поле создается не только самими листами, но и другими источниками, которые могут располагаться поблизости. Допустим, что другие источники расположены на достаточно большом расстоянии и создают однородное поле во всей рассматриваемой области. Теперь предположим, что два листа механически соединены друг с другом таким образом, что мы можем измерять полную силу, действующую на оба листа сразу. Покажите, что эта сила, приходящаяся на единицу площади каждого листа, дается выражением

$$\mathbf{F} = (\sigma_A + \sigma_B) \left( \frac{\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_3}{2} \right).$$

Это — частный случай неоднородного распределения зарядов в «пластине».

1.30. Общий вывод выражения для силы, действующей на заряженный слой. Результат, приведенный в задаче 1.29 и в разделе 2.7, можно доказать в общем виде. Пусть распределение заряда в плоской пластине можно описать с помощью объемной плотности заряда  $\rho(x)$  между  $x=0$  и  $x=b$  (толщина пластины). Тогда полная поверхностная плотность заряда, в данном случае заряженного листа, равна

$$\sigma = \int_0^b \rho(x) dx.$$

Если  $E_x$  является компонентой электрического поля, перпендикулярной к пластине, то полная сила, действующая на пластину (т. е.  $x$ -компонента; другие компоненты нас не интересуют), равна

$$F_x = \int_a^b \rho E_x dx.$$

Воспользовавшись теоремой Гаусса, связывающей  $\rho$  и  $E_x$ , покажите, что

$$F_x = \frac{1}{8\pi} (E_1^2 - E_2^2)$$

и что поэтому

$$F_x = \frac{1}{2} (E_{1x} + E_{2x}) \sigma.$$

$E_1$  — поле при  $x=0$ ,  $E_2$  — поле при  $x=b$ .

1.31. Сигароподобное распределение статических зарядов расположено в начале координат. Ось «сигары» направлена вдоль оси  $z$ , полный заряд равен  $q$ . Поле в точке  $P$  на оси  $z$  вне «сигары» обозначим через  $E$ . Если бы заряд  $q$  был сосредоточен в начале координат, то поле в точке  $P$  было бы равно  $E'$ . Какое из полей больше,  $E$  или  $E'$ ?

1.32. Вы знаете, что электрическое поле на расстоянии, равном  $r$  от источника сферически симметричного распределения зарядов будет таким же, как если бы все заряды, расположенные внутри сферы радиусом  $r$ , были бы сконцентрированы в источнике.

а) Зависит ли этот факт от закона Кулона, в котором сила поля обратно пропорциональна квадрату расстояния, или только от сферической симметрии? Будет ли это справедливо для силы, обратно пропорциональной кубу расстояния?

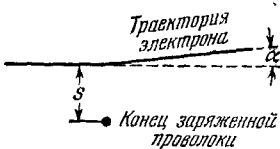
б) При некотором сферически симметричном распределении полного заряда  $Q$  он весь расположен на расстоянии, не большем  $r_0$  от центра распределения. Предположим, что сила, действующая между двумя зарядами, обратно пропорциональна кубу расстояния между ними, а не квадрату, как в законе Кулона. Сравните поле  $E$  на расстоянии  $r$  (где  $r > r_0$ ) с полем  $E'$ , которое было бы на этом расстоянии  $r$ , если бы весь заряд  $Q$  был сконцентрирован в источнике. Каково соотношение между полями  $E$  и  $E'$ ? Какое из них больше? Попытайтесь ответить на вопрос с помощью качественных соображений, а не математическим путем.

1.33. Представим себе мир, в котором существуют три типа зарядов вместо двух, причем одноименные заряды отталкиваются друг от друга, а разноименные заряды притягиваются совершенно симметричным образом. Обозначим типы зарядов  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Закон обратной пропорциональности силы квадрату расстояния и принцип суперпозиции справедливы так же, как в нашем мире. Предположим, что сила отталкивания между зарядами одного типа ровно в два раза больше силы притяжения между зарядами разных типов. Следовательно, равные единичные заряды вида  $A$ , разнесенные на 1 см, отталкиваются друг от друга с силой в 1 дин, тогда как единичные заряды  $A$  и  $B$  притягиваются друг к другу с силой в  $1/2$  дин. Покажите, что это обстоятельство допускает, в общем случае, существование нейтральных тел, т. е. тел, которые содержат заряды, но в целом силы не испытывают и не вызывают сил вблизи заряда любого вида. Каким образом можно обнаружить разницу между этим миром и нашим? Можно ли распространить представление об электрическом поле на этот мир?

1.34. Эксперимент с полем линейного заряда. В электронном микроскопе пучок электронов большой энергии, первоначально ускоренных разностью потенциалов

в  $V_0$  ед. СГСЭ $_V$ , проходит мимо тонкого заряженного провода, расположенного под прямым углом к первоначальному направлению пучка. Этот провод несет отрицательный заряд величиной  $\lambda$  ед. СГСЭ $_q$  на 1 см длины. Поле провода сравнительно невелико и мало влияет на траекторию электронов. Поэтому вы можете определить силу, действующую на данный электрон, как функцию от времени, предполагая в первом приближении, что электрон следует по первоначально прямой

траектории с постоянной скоростью. Используйте затем этот результат для вычисления поперечной компоненты момента количества движения, приобретенного электроном при движении мимо проволоки, и углового отклонения  $\alpha$  его действительной траектории от первоначальной. Вы придете к совершенно замечательному результату, заключающемуся в том, что угловое отклонение не зависит от того, на каком расстоянии от провода проходит траектория электронов. Таким образом, электрическое поле провода влияет на траекторию электронов подобно слабой призме, отклоняющей световые лучи. Такое устройство применя-



К задаче 1.34.

лось для демонстрации электронно-оптической аналогии бипризмы Френеля, знаменитого интерференционного опыта классической оптики. (Möllenstedt and Düker, Zeitschrift für Physik 145, 377 (1956).)

## К главе 2

2.18. По поверхности полого кругового цилиндра радиусом  $a$  и длиной  $b$ , с открытыми концами, равномерно распределен полный заряд  $Q$ . Чему равна разность потенциалов между точкой на оси у одного конца и серединой оси? Начертите несколько силовых линий поля такого цилиндра.

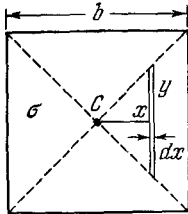
2.19. *Описываемая система является более общей, чем в задаче 2.10. Иллюстрируется важный общий принцип распределения зарядов.* Два металлических шара с радиусами  $R_1$  и  $R_2$  расположены на большом расстоянии друг от друга по сравнению с величинами их радиусов. Дано общее количество заряда  $Q$ , который им должны разделить между шарами. Как это делать, чтобы результирующее распределение зарядов обладало минимальной потенциальной энергией? Для ответа вычислите сначала потенциальную энергию системы для произвольного разделения зарядов,  $q$  на одном шаре и  $Q-q$  на другом. Затем ищите минимум энергии как функцию  $q$ . Можно считать, что заряд распределяется равномерно по сфере каждого шара, другой шар находится далеко, его влиянием можно пренебречь. Найдя оптимальное распределение зарядов, покажите, что при таком распределении разность потенциалов между двумя шарами равна нулю. (Следовательно, их можно соединить проводом и перераспределения заряда не произойдет. Эта задача может служить специальным примером общего закона, с которым мы встречались в гл. 3: заряд на проводнике распределяется таким образом, чтобы полная потенциальная энергия системы была минимальной.)

2.20. *Новые свойства поля задачи 2.1.* Поле, рассмотренное в задаче 2.1, имеет компоненты  $E_x = 6xy$ ,  $E_y = 3x^2 - 3y^2$ ,  $E_z = 0$ . Для выяснения его формы запишите потенциал  $\phi$ , полученный в задаче 2.1, в цилиндрических координатах  $r$ ,  $\theta$ , где  $r^2 = x^2 + y^2$ , а  $\theta = \arctg(y/x)$ . Начертите несколько эквипотенциальных поверхностей и силовых линий этого поля и сравните его с полем рис. 2.2.

2.21. Рассмотрите сферическую область, внутри которой находится точечный заряд  $q$ , не совпадающий с центром сферы. Верно ли, что потенциал в центре равен среднему от потенциала поверхности сферы? Не противоречит ли это утверждению относительно гармонических функций, приведенному в разделе 2.13?

2.22. *Решение одной задачи позволяет найти приближенное решение другой.* Мы нашли, что потенциал в центре диска радиусом  $a$ , равномерно заряженного с поверхностной плотностью  $\sigma$ , равен  $2\pi\sigma a$ . Зная это, предположим, что мы хотим определить, с точностью до нескольких процентов, потенциал в центре равномерно заряженного квадрата со стороной  $b$ . Можно ли это сделать, не решая задачу потенциала для квадрата? Найдите пределы возможной ошибки нашего определения.

2.23. *Точное решение предыдущей задачи.* Нетрудно вычислить точное значение потенциала в центре равномерно заряженного квадрата, рассмотренного в задаче 2.22. Хороший способ проведения интегрирования показан на рисунке. Найдите сначала вклад в потенциал в точке  $C$  от узкой полоски шириной  $dx$ , идущей от  $y = -x$  до  $y = x$ . После этого легко проинтегрировать по  $x$  от  $0$  до  $b/2$  и получить вклад этой четверти квадрата. В бесконечности потенциал, конечно, принят равным нулю.



К задаче 2.23.

О т в е т.  $\phi_C = 4\sigma b \ln(1 + \sqrt{2})$ .

2.24. *Покажем, что rot A действительно является вектором.* Как доказать, что величина, определенная в уравнении (2.76) как  $\lim_{a_i \rightarrow 0} \frac{\Gamma_i}{a_i}$ , действительно является компонентой вектора? Задачу можно решить следующим образом: взяв последовательно единичные векторы  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  и  $\hat{z}$  в качестве направлений для  $\hat{n}$ , мы определим для данного вектора  $\mathbf{F}$  в некоторой точке пространства три числа.

Их можно принять за компоненты вектора. Относясь к этому определению скептически, мы заключаем полученные три компоненты в кавычки, обозначая их « $A_x$ », « $A_y$ » и « $A_z$ ». Выберем теперь какое-нибудь другое направление для  $\hat{n}$  и определим предел отношения циркуляции к площади участка, ориентированного таким образом. Получим ли мы для этого отношения величину, равную  $\hat{n} \cdot (\hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z)$ ? Если да, то можно отбросить кавычки и заявить, что нами действительно получен вектор. Подумайте, сможете ли вы доказать это, рассматривая циркуляцию вокруг каждой из четырех сторон маленького тетраэдра, подобного изображенному на рис. 2.18. Что можно сказать о сумме четырех циркуляций? Чему равна сумма векторов площадей?

2.25. «Не все то золото, что блестит». Мы знаем, что дивергенция векторной функции  $\mathbf{F}$  представляет собой скаляр. Предположим, что мы хотим определить вектор, отличный от ротора, следующим образом:

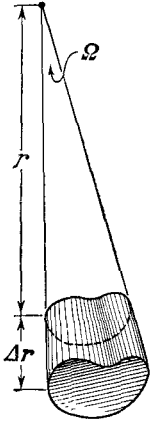
$$\mathbf{G} = \hat{x} \frac{\partial F_x}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial F_y}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

Можем мы утверждать, что эта величина является вектором? (Проверьте, как он ведет себя, когда вы поворачиваете систему координат, по отношению к которой берутся компоненты. Для этого достаточно рассмотреть поворот на  $90^\circ$  вокруг оси  $z$ . Тогда соотношения между новыми и старыми координатами будут следующими:  $x' = \hat{y}$ ,  $y' = -\hat{x}$ ;  $F'_x = F_y$  и т. д.)

2.26. Задача о роторе поля скорости. Расстояние между прямыми параллельными сторонами ирригационного канала равно 26 м. На поверхности воды в канале скорость течения максимальна в середине и уменьшается до нуля к краям. Предположим, что течение таково, что поверхностная скорость приблизительно равна

$$v = v_0 (1 - y^2/b^2),$$

где  $y$  — расстояние от центра, а  $v$  — скорость, направленная всюду вниз по течению. (В настоящем канале течение может быть совершенно другим.) Деревянная щепка, плывущая по воде на расстоянии половины пути между осями канала и одной из сторон, вращается по мере продвижения вниз по течению. Объясните это. Какая связь между этой задачей и задачей 2.16а? На какое расстояние течение унесет щепку за время ее поворота на  $360^\circ$ ?



$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \text{ Площадь} = (-\hat{r}) \Omega r^2, \nabla V = \hat{r} \left( \frac{dV}{dr} \right)_r, \\ \text{поток} = -\Omega r^2 \left( \frac{dV}{dr} \right)_r. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2) \text{ Площадь} = \hat{r} \Omega (r + \Delta r)^2 \approx \hat{r} \Omega (r^2 + 2r \Delta r), \\ \nabla V = \hat{r} \left( \frac{dV}{dr} \right)_{r+\Delta r} \approx \hat{r} \left[ \left( \frac{dV}{dr} \right)_r + \left( \frac{d^2V}{dr^2} \right) \Delta r \right], \\ \text{поток} = \Omega (r^2 + 2r \Delta r) \left[ \left( \frac{dV}{dr} \right)_r + \left( \frac{d^2V}{dr^2} \right) \Delta r \right]. \end{array} \right.$$

$\text{Полный поток} = \Omega \left( 2r \Delta r \frac{dV}{dr} + r^2 \frac{d^2V}{dr^2} \right),$   
 $\text{объем} = \Omega r^2 \Delta r,$

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\text{поток}}{\text{объем}} = \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} + \frac{d^2V}{dr^2} = \nabla \cdot (\nabla V(r)) = \nabla^2 V(r).$$

К задаче 2.27.

2.27. Частный случай:  $\nabla^2$  в сферических координатах. Эта задача познакомит вас с оператором Лапласа в сферических координатах для частного случая сферически симметричных функций. Пусть  $V$  будет функцией только  $r$ :  $V = V(r)$ .

Что тогда представляет собой функция  $\text{div}(\text{grad } V)$ , или  $\nabla \cdot (\nabla V)$ , которую мы обозначили  $\nabla^2 V$ ? В разделе 2.3 было показано, что в этом случае  $\nabla V$  равен  $\hat{r} dV/dr$ ; следовательно, мы должны рассмотреть дивергенцию этой векторной функции. Основные этапы вывода  $\nabla \cdot (\nabla V)$  приведены на рисунке.

а) Изучайте этот вывод до тех пор, пока вы его не поймете настолько, чтобы иметь возможность объяснить кому-нибудь другому. Обратите внимание на те места, где опущены члены второго порядка в  $\nabla r$ .

б) Покажите, что результат можно записать следующим образом:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rV(r)).$$

в) Если все, что нам известно о некоторой функции  $V(r)$  — это то, что  $\nabla^2 V(r) = 0$ , то что мы можем сказать о  $V$ ?

г) Покажите, что потенциал Юкавы  $V(r) = (1/r) e^{-\lambda r}$ , где  $\lambda$  — величина постоянная, удовлетворяет уравнению  $\nabla^2 V - \lambda^2 V = 0$ .

**2.28. Потенциал Юкавы и силовое поле.** Частица притягивается к определенной точке с направленной по радиусу силой, величина которой зависит только от радиального расстояния  $r$ :  $\mathbf{F} = \hat{r} f(r)$ . Покажите, что в таком поле линейный интеграл по замкнутому пути равен нулю и, значит,  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ . При этом  $\mathbf{F}$  можно представить в виде градиента некоторой потенциальной функции  $V(r)$ . (Это напоминает нам, что вывод электростатического поля из потенциала обусловлен не обратной пропорциональностью поля от элемента заряда квадрату расстояния, а только тем, что поле этого элемента заряда является центральным полем и принципом суперпозиции.) Потенциал Юкавы, упомянутый в задаче 2.27, является частным случаем поля, величина которого не обратно пропорциональна квадрату расстояния. Этот потенциал имеет большое значение в ядерной физике и физике элементарных частиц. Какое силовое поле соответствует потенциалу Юкавы  $V = Ce^{-\lambda r}/r$ , где  $C$  и  $\lambda$  — константы? При  $\lambda \rightarrow 0$  мы снова получим хорошо известный потенциал электростатического поля  $1/r$ . Покажите, что при  $\lambda > 0$  сила на любом расстоянии для данного значения  $C$  меньше, чем при  $\lambda = 0$ . Величина  $1/\lambda$  имеет размерность длины и часто называется «радиусом действия» силы. Каким уравнением следует заменить уравнение Пуассона для источников, создающих такие поля?

**2.29. Доказательство того, что электростатическое поле не может удержать заряженную частицу в состоянии устойчивого равновесия, существенно зависит от природы кулоновской силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния.** Предполагая, что сила, действующая между зарядами, изменяется как  $r^{-1.5}$ , попытайтесь создать такое расположение зарядов, которое удержит положительный заряд в состоянии устойчивого равновесия. Прodelайте то же для силы  $\sim r^{-2.5}$ .

**2.30. Энергия, запасенная в поле двух равных концентрированных зарядов.** Рассмотрите электрическое поле двух протонов, расположенных на расстоянии  $b$  см друг от друга. Согласно уравнению (2.36) (которое мы сформулировали, но не доказали) потенциальная энергия системы должна выражаться уравнением

$$U = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E}^2 dv = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2 dv = \\ = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E}_1^2 dv + \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E}_2^2 dv + \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 dv,$$

где  $\mathbf{E}_1$  — поле одной частицы, а  $\mathbf{E}_2$  — поле другой. Первый из трех интегралов справа можно назвать «собственной электрической энергией» протона; являясь внутренним свойством частицы, она зависит от размеров и структуры протона. При подсчете потенциальной энергии системы зарядов мы всегда отбрасываем эту энергию, предполагая, что она остается постоянной; это относится и ко второму интегралу. В третий интеграл входит расстояние между зарядами. Выбрав какую-нибудь подходящую систему координат, покажите, не вычисляя интеграла, что он имеет вид  $Ce^2/b$ , где  $C$  является численной постоянной, а именно определенным интегралом, содержащим только безразмерные величины. Если уравнение

(2.36) справедливо, чему должна быть равна постоянная  $C$ ? Мы знаем, что оно справедливо в подробно разобранном нами частном случае поверхностного заряда на сфере. Подумайте, не сможете ли вы использовать это для доказательства правильности уравнения (2.36), привлекая принцип суперпозиции. Если так, то вы, кроме этого, определите величину вашего определенного интеграла. (Если вам нравится вычислять определенные интегралы, вы можете попытаться вычислить его или свести к одному из табличных определенных интегралов. Это, однако, не легко.)

### К главе 3

3.18. Обице соображения насчет электростатических сил. а) Покажите, что квадрат разности потенциалов  $(\varphi_2 - \varphi_1)^2$  имеет размерность силы. Следовательно, порядок величины электростатических сил, действующих между телами, можно оценить по разности потенциалов. Размеры системы войдут только в виде отношений; кроме того, могут появиться некоторые постоянные, например  $4\pi$ . Каков порядок силы, которую можно ожидать при разности потенциалов в 1 ед. СГСЭУ между какими-нибудь телами?

б) Практически достижимые разности потенциалов ограничены особенностями строения диэлектриков. Самая большая разность потенциалов, близкая к  $10^7$  в, получена человеком с помощью электростатического генератора Ван-де-Граафа, работающего под высоким давлением. (Ускорители, дающие частицы с энергией в миллиарды электрон-вольт, не имеют такой большой разности потенциалов). Какая величина силы (в  $\kappa\Gamma$ ) соответствует мегавольту в квадрате? Эти соображения помогут вам понять, почему электростатические моторы не нашли широкого применения.

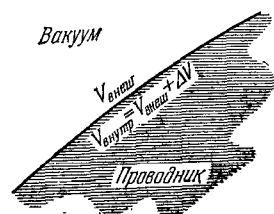
3.19. Представьте себе плоскости  $xy$ ,  $xz$  и  $yz$ , сделанные из металла и спаянные в местах пересечений. Единичный точечный заряд  $Q$  расположен на расстоянии  $d$  от каждой из плоскостей. Изобразите на чертеже конфигурацию «мнимых зарядов», которая нужна для удовлетворения граничных условий. Каковы направление и величина силы, действующей на заряд  $Q$ ?

3.20. Цилиндрический конденсатор. а) Определите емкость конденсатора, состоящего из двух коаксиальных цилиндров с радиусами  $a$  и  $b$  и длиной  $L$ . Предположите, что  $L \gg b - a$ , так что поправками на концах можно пренебречь. Проверьте результат, показав, что если величина промежутка между цилиндрами  $b - a$  очень мала по сравнению с радиусом, то ваша формула сводится к формуле для плоскопараллельного конденсатора.

б) Цилиндр с наружным диаметром, равным 5 см, подвешен в вертикальном положении к одному концу коромысла весов. Нижняя часть подвешенного цилиндра входит в неподвижный коаксиальный цилиндр с внутренним диаметром 7,5 см. Вычислите величину силы, которая тянет подвешенный цилиндр вниз, при разности потенциалов между двумя цилиндрами, равной 5 кв.

О т в е т. 171 дин.

3.21. Возможность скачка потенциала на поверхности проводника. (Действительно, нечто подобное имеет место у поверхности реального проводника;



К задаче 3.21.

это и удерживает электроны проводимости в металле!) В разделе 3.3 мы слегка коснулись вопроса об абсолютной величине потенциала внутри проводящего вещества. Для наших рассуждений было достаточно того факта, что внутри вещества не должно быть поля, т. е. что потенциал должен быть постоянным. В действительности на границе между проводником и вакуумом, как показано на рисунке, возможен скачок потенциала. Покажите, что такой скачок  $\Delta\varphi$ , если его величина одинакова по всей границе, не опровергнет нашего утверждения о том, что если внутри проводящей среды нет электрического поля, то и в вакууме непосредственно около границы не может быть тангенциальной составляющей поля  $\mathbf{E}$ . Для доказательства вы можете использовать равенство нулю линейного интеграла от  $\mathbf{E}$  по любому замкнутому пути.

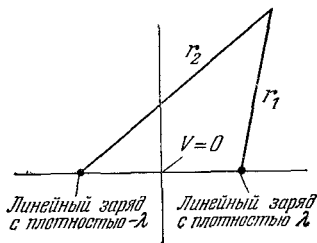
**3.22. Способ исследования системы, состоящей из проводящего шара и точечного заряда.** Эта задача служит иллюстрацией метода «решения по граничным условиям», который мы объяснили при рассмотрении точечного заряда над плоскостью. Действительно, результат, который вы должны получить, является вероятно, наиболее знаменитым достижением этого метода.

а) Рассмотрите два точечных разноименных заряда неодинаковой величины. Предположите, что больший заряд положительный, и поместите его в начале координат. Другой заряд поместите на оси  $x$  в точке  $x=b$ . Найдите две точки на оси  $x$ , в которых потенциал  $\varphi$  равен нулю (кроме точек  $x=+\infty$  и  $x=-\infty$ ). Затем рассмотрите сферу с центром на оси  $x$ , проходящую через эти две точки. Докажите, что во всех точках этой сферической поверхности потенциал равен нулю. Существуют ли какие-нибудь другие эквипотенциальные поверхности, имеющие форму сферы? Какую задачу о точечном заряде и проводящей сфере мы можем теперь решить?

б) Мы еще не готовы к решению любой задачи о точечном заряде и проводящей сфере, так как величина точечного заряда, величина заряда на сфере и отношение радиуса сферы к расстоянию до точечного заряда могут быть несовместимыми с имеющимся полем. Например, как вы определили бы поле точечного заряда  $q$  на некотором заданном расстоянии от сферы, полный заряд которой равен нулю? Это можно сделать с помощью дополнительного шара, а именно, воспользовавшись принципом суперпозиции. Попробуйте проделать это для частного случая: точечный заряд 10 ед. СГСЭ<sub>q</sub> расположен на расстоянии 20 см от центра металлического шара радиусом 10 см; шар не заряжен, т. е. его полный заряд равен нулю. Какова величина электрического поля на поверхности шара в точке, наиболее близкой к точечному заряду, и в диаметрально противоположной точке? Если вы получите правильные ответы на эти вопросы и поймете, как вы их получили, то можно считать, что вы достаточно овладели методом, называемым «инверсией в сфере».

О т в е т.  $1/4$  ед. СГСЭ<sub>v/cm</sub>;  $7/180$  ед. СГСЭ<sub>v/cm</sub>.

**3.23. Параллельные круговые цилиндры; класс двумерных электростатических легко решаемых задач.** Типичной двумерной задачей с граничными условиями является задача о двух параллельных круговых проводящих цилиндрах, например о двух металлических трубках бесконечно большой длины и с разными потенциалами. Математически эти двумерные задачи решаются гораздо проще, чем трехмерные. Действительно, ключом к решению всех задач класса «двух трубок» является поле вокруг двух параллельных линейных зарядов с одинаковой по величине и противоположной по знаку линейной плотностью. Все эквипотенциальные поверхности в таком поле представляют собой круговые цилиндры! И все силовые линии поля являются также кругами. Подумайте, сможете ли вы доказать это. Самым легким решением было бы решение с помощью потенциала, но не следует забывать, что в двумерной системе нельзя считать потенциал равным нулю в бесконечности. Пусть потенциал будет равен нулю на линии посередине между двумя линейными зарядами, т. е. в начале координат системы, изображенной на чертеже с поперечными сечениями зарядов. Потенциал в любой точке равен сумме потенциалов, вычисленных для каждого линейного заряда в отдельности. Это обстоятельство быстро приведет вас к открытию, что потенциал просто пропорционален  $\ln(r_2/r_1)$  и является, следовательно, постоянным на кривой, начерченной движущейся точкой, для которой отношение расстояний до двух точек является постоянной величиной. Начертите несколько эквипотенциальных поверхностей.

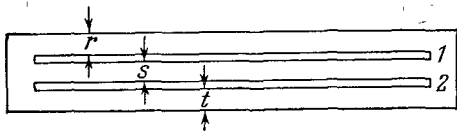


К задаче 3.23.

**3.24. Изучение поля квадруполь.** Электрическое поле, изображенное на рис. 2.2, имеет важное практическое применение для фокусировки пучков заряженных частиц. Оно называется квадрупольным полем. Как выглядит эквипотенциальная поверхность и каково ее уравнение? Опишите, как можно получить хорошее приближение к такому полю, конечно, в ограниченной области, применяя проводники с различными потенциалами.



**3.25. Пример на коэффициенты емкости.** На рисунке показано поперечное сечение плоского металлического ящика, в котором расположены пластины 1 и 2, площадью  $A$  каждая. Различные расстояния, отделяющие одну пластину от другой и от верхней и нижней граней ящика, обозначенные на рисунке буквами  $r$ ,  $s$  и  $t$ , можно считать небольшими по сравнению с шириной и длиной пластин, так что при определении зарядов на пластинах можно вполне пренебречь краевыми полями. В таком приближении требуется найти коэффициенты емкости  $C_{11}$ ,  $C_{22}$  и  $C_{12}$ . Вы можете также определить непосредственно коэффициент  $C_{21}$ , для того чтобы убедиться, что он будет равен  $C_{12}$ , согласно общей теореме, рассмотренной в задаче 3.27.



К задаче 3.25.

3.26. Коэффициенты емкости; общие свойства. Можно ли так расположить проводники или придать им такую форму, чтобы один или несколько «взаимных» коэффициентов емкости  $C_{jk}$  были положительными? Это означало бы, что положительный потенциал на проводнике  $j$  при заземлении всех других проводников, включая проводник  $k$ , создает чистый положительный заряд на проводнике  $k$ . Подумайте, можете ли вы а) собрать соответствующую схему или б) привести доказательство, что это невозможно. Возможно ли, чтобы один из коэффициентов «само-емкости  $C_{jj}$  был отрицательным?

3.27. Доказательство равенства  $C_{12} = C_{21}$ , основанное на сохранении энергии. Ниже приведены некоторые соображения, которые помогут вам доказать, что коэффициенты  $C_{12}$  и  $C_{21}$  всегда равны. Известно, что для переноса элемента заряда  $dQ$  из точки с нулевым потенциалом на проводник с потенциалом  $\phi$  необходимо затратить энергию  $\phi dQ$ , поставляемую каким-нибудь внешним источником. Рассмотрим систему из двух проводников, заряженных до потенциалов  $\phi_{1k}$  и  $\phi_{2k}$  соответственно («к» означает «конечный»). Это условие может быть осуществлено различными способами, если начинать с состояния, в котором все заряды и потенциалы равны нулю. Два из этих возможных способов особенно интересны.

а) Сохраняйте нулевое значение  $\phi_2$ , увеличивая постепенно  $\phi_1$ , от нуля до  $\phi_{1k}$ ; затем увеличивайте  $\phi_2$  от нуля до  $\phi_{2k}$ , поддерживая постоянным значение  $\phi_1$ , равное  $\phi_{1k}$ .

б) Выполните ту же программу, поменяв местами потенциалы, т. е. сначала увеличивайте  $\phi_2$  от нуля до  $\phi_{2k}$  и т. д. Вычислите полную работу, проделанную внешними источниками, для каждого из случаев а) и б). Затем завершите доказательство.

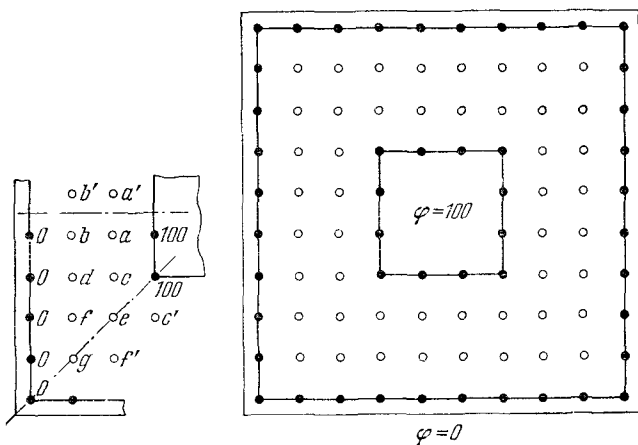
3.28. Усреднение гармонической функции по шести симметрично расположенным точкам. Пусть  $\phi(x, y, z)$  представляют собой функцию, которую можно разложить в степенной ряд около точки  $(x_0, y_0, z_0)$ . Напишите разложения в ряд Тэйлора для величины  $\phi$  в каждой из этих шести точек:

$$\begin{aligned} & (x_0 + \delta, y_0, z_0), \quad (x_0 - \delta, y_0, z_0), \quad (x_0, y_0 + \delta, z_0), \\ & (x_0, y_0 - \delta, z_0), \quad (x_0, y_0, z_0 + \delta), \quad (x_0, y_0, z_0 - \delta), \end{aligned}$$

которые симметрично окружают точку  $(x_0, y_0, z_0)$  на расстоянии  $\delta$ . Покажите, что если  $\phi$  удовлетворяет уравнению Лапласа, то среднее из этих шести значений равно  $\phi(x_0, y_0, z_0)$  с точностью до третьего порядка по  $\delta$ .

3.29. Пример приближенного решения уравнения Лапласа методом релаксации. Здесь показано, как приближенно решить уравнение Лапласа для данных граничных значений, применяя только арифметику. Это — метод релаксации, упомянутый в разделе 3.8. Он основан на результате задачи 3.28. Для простоты возьмем двумерный случай. На рисунке изображены два квадрата с эквипотенциальными границами, один внутри другого. Так будет выглядеть поперечное сечение конденсатора, выполненного из двух квадратных металлических ящиков разного размера. Задача состоит в определении значений функции в ряде точек, которые были бы хорошим приближением к действительному значению потенциальной функции  $\phi(x, y)$  в этих точках. Для облегчения задачи мы воспользуемся довольно грубой решеткой. Примем произвольно потенциал равным 100 на гра-

нице внутреннего квадрата и 0 на границе внешнего. Все точки на этих границах имеют указанные значения потенциалов. В принципе можно начать с любых значений на внутренних точках; однако разумный их выбор экономит время. Ряд начальных значений приведен на рисунке. Может быть, вы подберете более удачные. Очевидно, что симметрия дает преимущества: требуется определить только семь внутренних значений. Теперь вы можете продвигаться по решетке, систематически заменяя значение потенциала в каждой внутренней точке средним из значений ее четырех соседей. Остановитесь, если вы устали или если изменения, которые получаются при таком продвижении по решетке, становятся достаточно малыми.



К задаче 3.29.

Замените значение потенциала внутренней точки на  $\frac{1}{4} \times$  (сумма потенциалов в четырех соседних точках):  $c \rightarrow \frac{1}{4} (100 + a + d + e)$ . Положите  $a = a', b = b', c = c'$  и  $f = f'$  и примите следующие начальные значения:  $a = 60, b = 30, c = 50, d = 25, e = 40, f = 20, g = 10$ .

Хорошо прекратить это продвижение тогда, когда изменение, возникающее от одного перехода, не превосходит единицы. «Релаксация» в данном случае заключается в изменении распределения значений потенциалов от одного перехода к другому и тесно связана с физическим явлением диффузии. Если вы начнете со слишком большого значения потенциала в одной точке, оно «распространится» на ближайших соседей, оттуда к следующим ближайшим соседям до тех пор, пока разница не будет настолько сглажена, насколько позволяют условия на границе.

**3.30. Решение уравнения Лапласа с помощью ЭВМ.** После того как вы получили свое решение, вам может быть интересно сравнить его с решением той же задачи на сетке с вдвое меньшими промежутками, полученным с помощью ЭВМ (см. рисунок). Машина получила задание остановиться, когда при новом переходе величина изменения не превышает 0,1. Это составило 41 переход по сетке, причем для полного вычисления потребовалось 3 сек. Положите на рисунок пустую кальку и начертите одну или две эквипотенциальные кривые, используя простую линейную интерполяцию между точками. Как можно определить из данных рисунка емкость, приходящуюся на единицу длины конденсатора такого поперечного сечения?

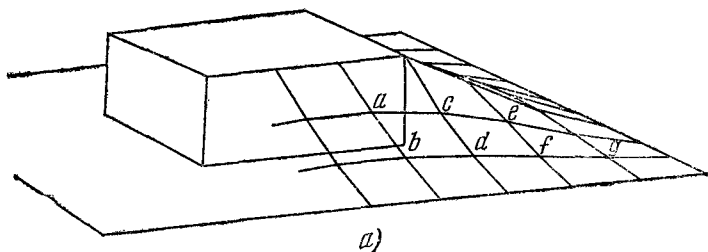
**3.31. Вопросы для обсуждения; физический смысл метода релаксации.** Изменение потенциала в пространстве между двумя заряженными цилиндрами в точности эквивалентно другому физическому явлению, а именно способности упругой мембраны принимать ту или иную форму. Представьте себе решетку, изображенную на рисунке к задаче 3.29, с точками (включая граничные точки), соединенными резиновыми лентами с одинаковым натяжением. Теперь представьте, что внутренняя



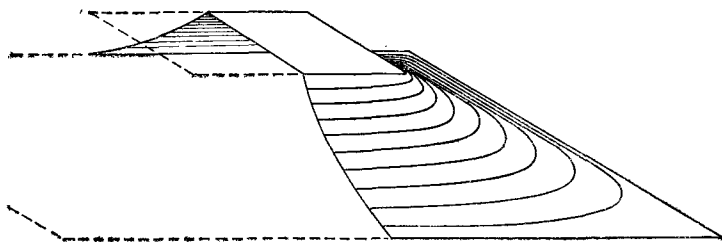
задача эквивалентна вычислению запасенной энергии на единицу длины для заданной разности потенциалов, следовательно,

$$U = \frac{1}{2} C \Phi_{12}^2 = \frac{1}{8\pi} \int |\nabla\varphi|^2 dv.$$

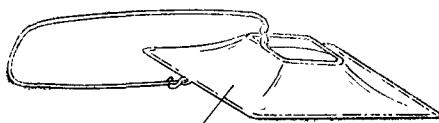
Задача заключается в оценке этого интеграла, в который входит действительная (реальная) и неизвестная нам потенциальная функция  $\varphi$ , посредством замены этой функции некоторой пробной функцией  $\psi(x, y)$ . Функция  $\psi$  должна удовлетворять поставленным граничным условиям, т. е. ее значение должно уменьшаться до  $\varphi_0$



а)



б)



Мыльная пленка

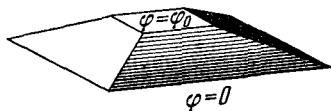
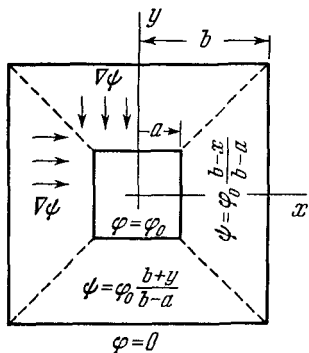
в)

К задаче 3.31.

в малом квадрате и до нуля в большом квадрате. В остальном мы можем выбирать ее произвольно. Надо только выбрать такую функцию, при которой возможно интегрирование и которая качественно ведет себя так, как должно вести себя настоящее решение. В качестве первого шага возьмем простую линейную функцию в каждой из четырех частей, на которые внутреннее пространство разделено диагоналями. Согласно данным на чертеже, где сторона внутреннего квадрата равна  $2a$ , а сторона внешнего квадрата равна  $2b$ , возьмем в правой части квадрата

$$\psi = \varphi_0 \frac{b-x}{b-a}$$

и т. д. График функции  $\psi$  представляет собой усеченную пирамиду. Теперь, не смотря на то, что  $\nabla^2\psi=0$  почти всюду,  $\psi$  не удовлетворяет уравнению Лапласа. Почему? Вычислите интеграл для  $U$  и таким образом получите оценку емкости. Что будет меньше: реальная емкость или ваша оценка? В каком случае ваша оценка будет ближе к истине — при  $a \ll b$  или при  $(b-a) \ll b$ ? Если необходимо лучшее приближение, можете ли вы предложить более удачную пробную функцию?



К задаче 3.32.

#### К главе 4

**4.20.** Предположим, что закон Ома недействителен по причине, рассмотренной в разделе 4.5. Увеличим электрическое поле на 10%. На какую величину возрастет плотность тока?

**4.21.** Вклад одиночного иона в электрическую проводимость можно выразить величиной, называемой *подвижностью* иона. По определению она имеет размерность скорости, деленной на величину электрического поля. Подвижность равна средней скорости движения ионов в единичном поле. В обозначениях, принятых в разделе 4.4, подвижность, которую мы будем обозначать через  $\mu$ , равна  $\mu = \bar{u}/E$ . Как зависит, по вашему мнению, подвижность положительного иона в газе от плотности газа при постоянной температуре? Имеется обширная литература по

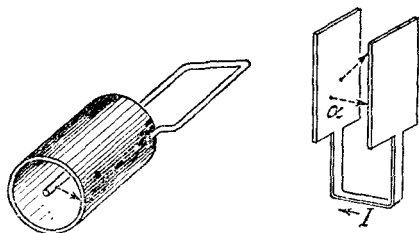
экспериментам с подвижностью ионов. Обычно подвижность измеряется в  $см/сек$  на  $в/см$ , или  $см^2/в \cdot сек$ . В очень чистом гелии при давлении в 1 атм наблюдаемая подвижность ионов  $He^+$  равна  $5,1 см^2/в \cdot сек$ , а подвижность отрицательных ионов, т. е. электронов, в тех же условиях равна  $500 см^2/в \cdot сек$ . Вычислите значения  $\tau_+$  и  $\tau_-$ , соответствующие этим цифрам. Если сравнить  $\tau$  со временем «свободного пробега», то для какой из частиц длина свободного пробега больше — для электрона или для положительного иона? Какая часть проводимости ионизованного гелия создается положительными ионами? (В большинстве газов свободные электроны быстро захватываются атомами. В результате образуются тяжелые отрицательные ионы, которые обладают почти такой же малой подвижностью, как и положительные ионы. В некоторых газах, к которым принадлежит гелий, отрицательные ионы не образуются. Такие газы являются идеальными для опытов по определению истинной подвижности электрона.)

**4.22.** Ион, движущийся в газе из нейтральных атомов, ведет себя под влиянием электрического поля подобно шару в пинболе \*). Проведите аналогию. В чем различие и сходство? Установите эквивалент закона Ома для модели шара в пинболе. Представьте, что вы должны сконструировать демонстрационную модель для научного музея. Как должна быть сделана доска для пинбола, чтобы обеспечить наиболее реалистическое двумерное представление ионной проводимости? Рассмотрите такие вопросы: расположение стержней, их упругость. Как имитировать тепловое движение, как представить положительные и отрицательные ионы?

**4.23.** Изучение импульса тока, обусловленного прохождением одиночной заряженной частицы. Основные положения, существенные для понимания многих устройств для обнаружения частиц в современной физике (см. задачу 3.17). Результат задачи 3.17 поможет нам понять течение тока в контуре, часть которого состоит из заряженных частиц, движущихся в пространстве между двумя электродами. Вопрос состоит в следующем: какова природа тока, если пространство пересекает только одна частица? (Если мы ответим на этот вопрос, то сможем легко опи-

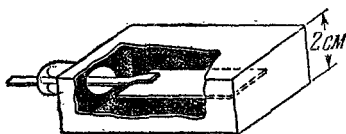
\*) Имеется в виду игра, где шар движется между стержнями и сталкивается с ними.

сать течение большого количества частиц, появляющихся в любой последовательности.) На рисунке показан простой контур, состоящий из двух электродов в вакууме, соединенных коротким проводом. Предположим, что электроды находятся на расстоянии 2 мм друг от друга. Пусть радиоактивное ядро, находящееся в левой пластине, испускает довольно медленную альфа-частицу с зарядом  $+2e$ . Она движется непосредственно к правой пластине с постоянной скоростью  $10^8$  см/сек и останавливается в ней. Постройте график тока в соединительном проводе, откладывая по осям ток и время. Сделайте то же самое для альфа-частицы, которая пересекает промежуток, двигаясь с той же скоростью, но под углом в  $45^\circ$  к нормали. (В действительности для таких коротких импульсов, как этот, индуктивность соединительного провода, которой в данном случае мы пренебрегаем, будет влиять на форму импульса.) Предположим, что мы имеем цилиндрическое расположение электродов, причем альфа-частицы излучаются из тонкого провода, ось которого совпадает с осью небольшого цилиндрического электрода. Изменится ли форма импульса тока?



К задаче 4.23.

**4.24.** Применение некоторых идей из задач 4.21 и 4.23. Ионизационная камера состоит из показанного на рисунке металлического ящика, наполненного аргоном при атмосферном давлении. Подвижности положительных ионов аргона и электронов равны 1,6 и 800 см<sup>2</sup>/в·сек соответственно. Металлическая пластинка, образующая центральный электрод, укреплена на изоляторе и соединена через большое сопротивление с потенциалом 500 в. Она присоединена также к усилителю, выходное напряжение которого пропорционально току в центральном электроде. Импульс выходного напряжения может быть показан на экране осциллографа. Укажите, какие виды импульсов вы ожидаете увидеть на экране, если через



К задаче 4.24.

камеру проходит частица с высокой энергией, оставляя следы ионов вдоль своего пути. (Следует предусмотреть возможность запуска развертки осциллографа перед самым прохождением частицы.) Какие скорости развертки желательны для изучения импульсов


**4.25.** Диод с ограничением по пространственному заряду; важное применение уравнения Пуассона; вывод закона «трех вторых». Вернитесь к рис. 4.2 и подготовьте себя решением задачи 4.4, если вы ее еще не решили. Мы будем изучать течение электронов в вакуумном диоде. Допустим (как в задаче 4.4), что электроны вылетают из катода с нулевой начальной скоростью, что потенциал катода равен нулю, а потенциал анода  $V_0$ . Но теперь на электрическое поле между анодом и катодом заметно влияет присутствие электронов, т. е. отрицательного пространственного заряда. Это означает, что изменение потенциала  $V(x)$  между анодом и катодом должно быть согласовано с остальными величинами, а именно, с плотностью пространственного заряда  $\rho(x)$ , скоростью электрона на расстоянии  $x$  от катода  $v(x)$ , причем обе эти величины в свою очередь зависят от  $V$ . Условия, которым должно удовлетворять решение задачи, сводятся к следующему:

- 1) Определенное падение напряжения: 
$$\begin{cases} V(x)=0 & \text{при } x=0, \\ V(x)=V_0 & \text{при } x=s. \end{cases}$$
- 2) Уравнение Пуассона:  $d^2V/dx^2 = -4\pi\rho$ .
- 3) Непрерывность тока:  $\rho v = J = -I/A$  (постоянная).
- 4) Динамика электрона:  $\frac{1}{2} m v^2 = eV(x)$ .

Покажите, что три последних условия приводят к дифференциальному уравнению, связывающему  $V$  и  $x$ , вида  $d^2V/dx^2 = K/V^{1/2}$ , где  $K$  — постоянная, образованная из различных постоянных задачи. Мы ищем решения этого уравнения, которые будут

удовлетворять условию 1), а именно граничным значениям  $V(x)$ . В действительности этим значениям будет удовлетворять целое семейство решений. Мы должны использовать физические соображения, чтобы наложить еще больше ограничений. Нас интересует предельный случай, когда для заданного значения  $V_0$  эффект отталкивания пространственного заряда настолько велик, что электроны не смогут попасть к аноду, даже если катод будет их испускать. Для выполнения этого условия электрическое поле на катоде должно быть равно нулю. Подумайте почему? Что произошло бы, если бы поле не было равно нулю, а было бы положительным? Если бы оно не было равно нулю, а было бы отрицательным? Итак, мы требуем, чтобы  $dV/dx=0$  при  $x=0$ . Чтобы найти решение дифференциального уравнения, помножьте обе части уравнения на 2 ( $dV/dx$ ). Тогда левая часть будет равна выражению  $(d/dx)(dV/dx)^2$ . Вы должны в этой задаче показать, что ток  $I$  при условии «ограничения пространственным зарядом» пропорционален  $V_0^2$ . Эта система является поразительным и важным примером, который не подчиняется закону Ома! Однако электроны, излучаемые катодом реального днода, вылетают из него не с нулевой скоростью, а со скоростями, зависящими от температуры катода. Это соответствует кинетической энергии, равной примерно одной десятой электрон-вольта. Пока мы имеем дело с гораздо большими значениями потенциалов, чем это, условие равенства нулю начальной скорости является вполне допустимым приближением.

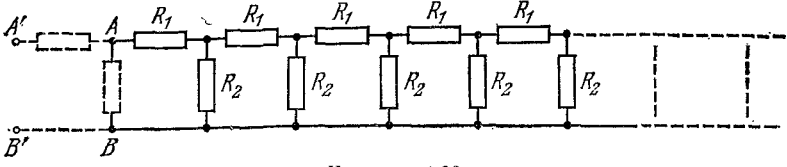
**4.26. Опыт Толмэна и Стюарта \***). В 1917 г. Толмэн и Стюарт опытным путем доказали, что за проводимость в металлах ответственны электроны. Опыт был основан на следующей простой идее. Если электроны в металле являются сравнительно свободными, то их инерция помешает им точно следовать за движением кристаллической решетки, если последнюю заставляют двигаться ускоренно. Если вы потрясете кусок металла, электроны будут отставать. В результате этого появится относительное движение положительных и отрицательных зарядов и, следовательно, электрический ток. В этой задаче мы развиваем идею опыта Толмэна — Стюарта. Рассмотрим медное кольцо, вращающееся с большой и постоянной скоростью вокруг своей главной оси. Оно является электрически нейтральным; в нем нет тока, так как ионы меди и электроны в кристаллической решетке движутся с одинаковой скоростью. Теперь внезапно остановим кольцо. Электроны будут стремиться продолжать движение, и единственной силой, с помощью которой решетка может остановить их, является та же «сила трения», которая ограничивает их скорость, когда они увлекаются электрическим полем. В этом опыте должно существовать простое соотношение между ускорением электронов и электрическим полем  $E$ , которое в неподвижном проводнике вызвало бы такое же относительное движение электронов и решетки. Если вы обдумаете это соображение, то обнаружите, что остановка кольца вызывает течение определенного количества зарядов. Следовательно, интеграл  $\int I dt$  определяется просто начальной скоростью кольца до остановки, проводимостью меди и отношением заряда к массе свободных носителей. Выведите формулу. Опыт указывает знак носителей. Толмэн и Стюарт пользовались катушкой с большим числом витков тонкой проволоки вместо кольца, так что они могли легко вывести ток во внешнюю цепь для измерения.

**4.27. Задача на схемы с симметрией.** Любые цепи можно изобразить на плоскости, если воспользоваться одним из обычных способов обозначения — «пересечениями без касания», например таким: . Представьте себе куб с сопротивлениями вдоль каждого ребра. В каждом углу спаяны концы трех сопротивлений. Расположите эту схему на плоскости в виде контурной диаграммы. Найдите эквивалентное сопротивление между двумя узлами, которые отвечают диагонально противоположным углам куба, для случая, когда все сопротивления имеют одинаковое значение  $R_0$ . Для этого вам не надо одновременно решить большого количества уравнений; достаточно воспользоваться свойством симметрии системы. Теперь найдите эквивалентное сопротивление

\*) R. G. Tolman and T. D. Stewart, Phys. Rev. 9, 164 (1917). Опыты проводились в химических лабораториях Калифорнийского университета.

ние между двумя узлами, которые соответствуют диагонально противоположным углам одной грани куба. Здесь соображения симметрии снова сведут эту задачу к очень простой. Для обоих этих вычислений полезно сделать пространственный чертеж куба, который поможет вам обнаружить симметрию токов.

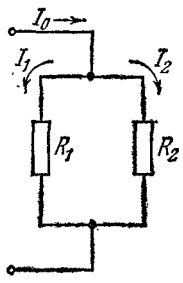
4.28. Существуют важные типы схем, которые имеют бесконечно большую протяженность. На рисунке изображена цепь последовательных и параллельных сопротивлений, распространяющихся на бесконечно большое расстояние вправо.



К задаче 4.28.

Нижний привод не имеет сопротивлений и служит возвратным проводом. Это устройство иногда называют схемой аттенюатора или лестничной схемой. Задача заключается в определении «входного сопротивления», т. е. эквивалентного сопротивления между клеммами A и B. В этой задаче нас интересует в основном метод решения. Его можно использовать в других разделах физики, где имеется подобное повторение идентичных элементов (даже для бесконечной цепи линз в оптике). Дело в том, что входное сопротивление, которое нам еще неизвестно — назовем его  $R$ , — не изменится, если подключить к началу цепи новую группу сопротивлений, которая удлинит всю цепь на одну ячейку. Но, прибавляя эту часть, мы видим, что новое входное сопротивление состоит из  $R_1$ , последовательно соединенного с параллельно соединенными  $R_2$  и  $R$ . Мы сразу получаем уравнение, которое можно решить для  $R$ . Покажите, что если к входу такой цепи приложено напряжение  $V_0$ , то напряжение в соответствующих узлах уменьшается в геометрической прогрессии. Каково должно быть отношение сопротивлений, чтобы превратить схему в аттенюатор, уменьшающий напряжение вдвое с каждой ступенью? Очевидно, что бесконечная лестничная схема на практике неприменима. Можете вы предложить способ ее ограничения после нескольких секций, не вводящий ошибки в характер ослабления?

4.29. Простой контур, рассматриваемый с новой точки зрения, иллюстрирует вариационный принцип. На рисунке изображены два сопротивления,  $R_1$  и  $R_2$ , соединенных параллельно. Ток  $I_0$  как-то распределяется между ними. Покажите, что условие  $I_1 + I_2 = I_0$  вместе с требованием минимального рассеяния энергии приводит к тем же значениям тока, которые мы вычислили бы по обычным формулам для контуров. Этот контур является иллюстрацией общего вариационного принципа, который справедлив для цепей постоянного тока: распределение токов в контуре для заданного входного тока  $I_0$  всегда обеспечивает минимальное общее рассеяние энергии.

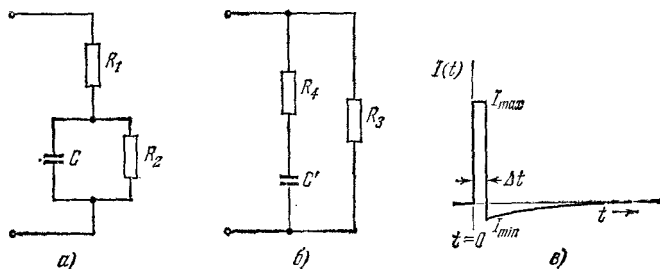


К задаче 4.29.

4.30. Забавное применение принципа суперпозиции и симметрии. «Трудная задача», которая была популярна несколько лет назад среди инженеров-электриков, состояла в следующем: для образования двумерной бесконечной сети с квадратными ячейками соединяют бесконечно большое число одноомных сопротивлений. Следовательно, в каждом узле соединяются концы четырех сопротивлений. Чему равно эквивалентное сопротивление между узлом и одним из четырех ближайших соседних узлов? Эта задача является удивительным примером мощности принципов симметрии и суперпозиции. Пользуясь внимательно принципом суперпозиции, вы можете решить эту задачу почти в уме. Попробуйте решить ее другим способом и вы оцените элегантность первого решения. Ответ, между прочим, равен  $0,5 \text{ ом}$ , но мы не будем мешать решению, сообщая вам, какую суперпозицию токов следует рассмотреть.



**4.31.** К вопросу об эквивалентных контурах с токами и напряжениями, меняющимися во времени. Исследование коротких импульсов с помощью суперпозиции. В этой задаче вы исследуете поведение двух контуров, когда напряжения меняются во времени. Каждый контур состоит из двух сопротивлений и одной емкости, но по-разному соединенных (см. рисунок). Вашей конечной целью является доказательство довольно удивительного факта. Если подобрать подходящие значения сопротивлений  $R_3$  и  $R_4$  и емкости  $C'$ , то контуры справа и слева совершенно невозможно различить при любых внешних измерениях. Это значит, что если к клеммам приложить любое изменяющееся во времени напряжение  $V(t)$ , то ток  $I(t)$  будет



К задаче 4.31.

одинаковым в обоих контурах. Доказательство приведет вас к довольно общему и мощному методу, основанному на принципе суперпозиции. Сначала рассмотрите, что произойдет в левом контуре, если напряжение между клеммами представляет собой короткий импульс:

$$V=0, \quad t < 0; \quad V=V_0, \quad 0 < t < \Delta t; \quad V=0, \quad t > \Delta t.$$

Таким образом, мы закорачиваем внешние клеммы до  $t=0$ , размыкаем клеммы и быстро присоединяем батарею на короткий промежуток времени  $\Delta t$ , затем удаляем батарею и сразу же закорачиваем клеммы. Время  $\Delta t$  выбирается настолько коротким, что напряжение на емкости может достичь только очень небольшой части  $V_0$ . Вычисляя ток в емкости в течение этого интервала, мы можем считать, что все напряжение сосредоточено на  $R_1$ . За время  $\Delta t$  на емкости накапливается определенный заряд, который затем стекает через  $R_1$  и  $R_2$ , соединенные параллельно. Часть этого разрядного тока появляется во внешних проводах. Таким образом, отклик полного тока на импульс  $V(t)$  должен иметь примерно такой вид, как на рис. *в*. Вы должны найти  $I_{\max}$ ,  $I_{\min}$  и постоянную времени для длинного «хвоста» импульса. Теперь исследуйте таким же способом контур на рис. *б*. Покажите, что откликом на импульс напряжения будет такой же ток  $I(t)$ . Покажите, что при соответствующем подборе  $R_3$ ,  $R_4$  и  $C'$  можно сделать два отклика идентичными. Этого вполне достаточно, чтобы доказать, что два контура с правильно подобранными значениями параметров будут реагировать одинаково на любое напряжение  $V(t)$ . Ведь любую функцию  $V(t)$  можно рассматривать как суперпозицию ряда импульсов; поскольку контуры линейные, то их отклики на сложную функцию будут суперпозицией откликов на индивидуальные импульсы. Действительно, отклик контура на сложную функцию  $V(t)$  часто можно определить, анализируя его отклик на короткий импульс. Вы можете проверить это на одном из приведенных контуров. Задайтесь напряжением в виде квадратного импульса, не являющегося коротким по сравнению с постоянной времени  $RC$ .

## К главе 5

**5.11.** Что произошло бы, если бы величина заряда изменялась со скоростью носителя заряда пропорционально  $(1-v^2/c^2)^{-1/2}$ ? Оцените (дайте порядок величины) разность зарядов, которую можно ожидать для молекулы водорода и атома гелия. Примите, что кинетическая энергия протона увеличивается от пренебрежимо малой величины примерно до  $1 \text{ Мэв}$  при переходе из молекулы  $\text{H}_2$  в ядро  $\text{He}$ .

тогда как кинетическая энергия двух электронов увеличивается при этом переходе всего на несколько десятков эв. Если при этих условиях молекула  $H_2$  окажется случайно совершенно нейтральной, какой избыток заряда можно ожидать в литре гелия при нормальных температуре и давлении? Каков будет порядок величины результирующего электрического поля?

**5.12.** Предположите, что в лабораторной системе координат, показанной на рис. 5.20, положительные заряды находятся в состоянии покоя, а движутся только отрицательные заряды. Получите выражение для силы, действующей на движущийся пробный заряд в этом случае.

**5.13.** В ускорителе частиц со «встречными пучками» электрон и позитрон, каждый с энергией в 2 Бэв, движутся навстречу друг другу. При встрече они настолько близко проходят один мимо другого, что каждый из них отклоняется от своего первоначального направления на угол  $10^{-2}$  рад. Определите наименьшее расстояние между ними, пользуясь результатом задачи 5.9.

**5.14.** Какая плотность нескомпенсированного заряда вдоль каждого из медных проводов в установке рис. 6.3 потребовалась бы для создания силы электростатического взаимодействия, равной по величине силе, которую мы вычислили для магнитного взаимодействия? Оцените величину поля на поверхности провода диаметром 1 мм, несущего такой заряд. Сравните величину этого поля в ед. СГСЭ $_{V/cm}$  с величиной магнитного поля в гауссах на поверхности провода в этом примере. Является ли результат случайным, или вы можете показать, что он имеет общий характер.

**5.15.** Преобразование тока и линейной плотности заряда при наличии нескольких видов носителей зарядов. Рассмотрите сложный линейный заряд, образованный носителями нескольких видов, каждый со своей собственной скоростью. В лабораторной системе координат  $k$ -я компонента заряда  $q_k$  состоит из  $n_k$  зарядов на 1 см, каждый из которых движется со скоростью  $v_k = \beta_k c$ . В этой системе координат полный ток  $I$  и линейная плотность заряда  $\lambda$  даются выражениями:

$$I = c \sum_k n_k q_k \beta_k, \quad \lambda = \sum_k n_k q_k.$$

Теперь преобразуйте эти величины в систему координат, движущуюся со скоростью  $\beta c$ . Как было показано в связи с рис. 5.20, скорость и плотность заряда преобразуются следующим образом:

$$\beta'_k = \frac{\beta_k + \beta}{1 + \beta\beta_k}, \quad n'_k = \frac{n_k \gamma'_k}{\gamma_k}, \quad q'_k = q_k.$$

Докажите, что в новой системе координат

$$I' = \gamma (I + c\beta\lambda), \quad \lambda' = \gamma \left( \lambda + \frac{\beta I}{c} \right).$$

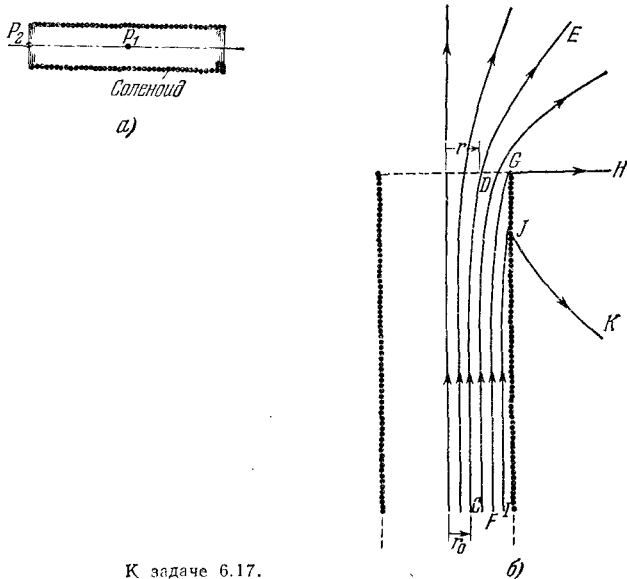
Эти выражения показывают, что наш первый результат совершенно не зависит от модели. Кроме того, отсюда следует, что если в данной системе координат полный ток и полный заряд в проводе равны нулю, то это верно для всех систем координат, независимо от того, как ведут себя компоненты токов и зарядов. Этот приятный своей простотой результат, вероятно, не так уж очевиден.

## К главе 6

**6.16.** Изучение опыта Роуланда. Вычислите приближенно значение магнитного поля над вращающимся диском в опыте Роуланда. Необходимые данные возьмите из репродукции его статьи, приведенной на рис. 6.27. Вам также надо знать, что потенциал вращающегося диска по отношению к заземленным пластинам, расположенным над диском и под ним, был равен примерно 10 кв в большинстве опытов. Эти данные приведены в его статье в том месте, где дано описание наиболее тонкой части аппаратуры, а именно «аstaticкого» магнитометра, который изображен в вертикальной трубке слева. Магнитометр представляет собой устройство, в котором две магнитные стрелки, направленные в противоположные стороны, жестко соединены друг с другом на одном подвесе, так что вращающие моменты,

создаваемые магнитным полем Земли, взаимно уничтожаются. Поле, созданное вращающимся диском и действующее главным образом на ближайшую стрелку, может быть поэтому обнаружено в присутствии значительно большего однородного поля.

**6.17. Упражнение на применение принципа суперпозиции.** Применение принципа суперпозиции позволяет установить ряд простых фактов, касающихся полей соленоидов. Идея заключается в том, что два соленоида одинакового диаметра и длины  $L$ , соединенных торцами, составляют соленоид длиной  $2L$ . Из соединения двух полубесконечных соленоидов получается один бесконечный и т. д. (В полубесконечном соленоиде один его конец находится здесь, а другой — бесконечно далеко.) Перечислим ряд фактов, которые можно проверить с помощью этой идеи.



К задаче 6.17.

а) В соленоиде конечной длины на рис. а магнитное поле на оси в точке  $P_2$  на одном конце приблизительно равно половине поля в точке  $P_1$  в центре. (Может быть, оно немного больше половины, или немного меньше?)

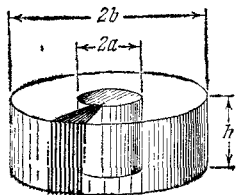
б) В полубесконечном соленоиде, изображенном на рис. б, силовая линия поля  $FGH$ , проходящая через самый конец витка, является прямой от  $G$  до бесконечности.

в) Магнитный поток  $\mathbf{B}$ , проходящий через торец полубесконечного соленоида, равен половине потока, проходящего через внутреннюю часть катушки на большом расстоянии от торца.

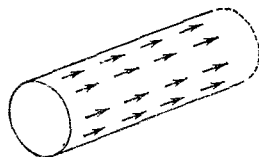
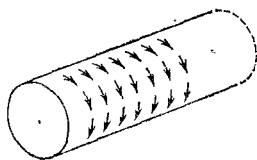
г) Любая силовая линия, проходящая на  $r_0$  см от оси глубоко внутри катушки, выходит из конца катушки на расстоянии от оси, которое равно  $\sqrt{2} r_0$ . Покажите, что все эти утверждения правильны. Что еще вы можете заметить?

**6.18. Попробуйте изобрести!** Один из способов создания весьма однородного магнитного поля состоит в применении очень длинного соленоида, причем для работы используется поле только в средней части внутри соленоида. Такой способ часто неудобен, так как требует места и большой мощности. Не можете ли вы предложить способы расположения некоторого числа катушек или коротких соленоидов для получения хорошей однородности поля в ограниченной области? (После того как вы поработаете над этой задачей, найдите в предметном указателе любой стандартной книги по электричеству и магнетизму раздел «катушки Гельмгольца» и посмотрите, похоже ли какое-нибудь из ваших изобретений на описанные там устройства.)

**6.19.** На тор прямоугольного сечения равномерно намотана катушка с полным числом витков  $N$ . На рисунке показано лишь несколько витков. При большом количестве витков можно считать, что ток на плоских поверхностях тора течет точно в радиальных направлениях, а на внутренней и внешней цилиндрических поверхностях точно по образующей. Во-первых, убедитесь, что при таких предположениях из соображений симметрии следует, что магнитное поле должно быть всюду направлено «по окружности», следовательно, все силовые линии этого поля должны представлять собой круги с центрами на оси тора. Во-вторых, докажете, что поле равно нулю во всех точках вне тора, включая внутреннее отверстие в центре. В-третьих, определите величину поля внутри тора как функцию радиуса.



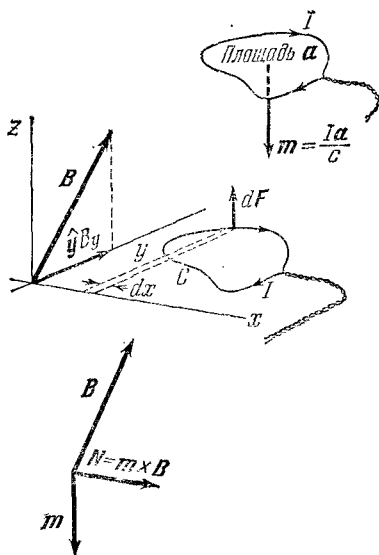
К задаче 6.19.



К задаче 6.21.

**6.20.** Для проведения точных магнитных измерений физик хочет исключить влияние магнитного поля Земли, так чтобы в объеме примерно  $30 \times 30 \times 30 \text{ см}^3$  остаточное поле не превышало  $10 \text{ мГс}$  в любой точке. Величина магнитного поля Земли в этой области равна  $0,55 \text{ гс}$  и составляет угол  $30^\circ$  с вертикалью. В данном объеме ее можно считать постоянной с точностью до миллигаусса. (Само поле Земли не меняется на такую величину в пределах  $30 \text{ см}$ , но в лаборатории часто встречаются местные возмущения.) Предложите подходящее для данной задачи соединение катушек и определите число ампер-витков, требуемое для вашей компенсирующей системы.

**6.21.** Любой реальный соленоид представляет собой спираль, в которой, кроме кругового тока, существует некоторая продольная компонента тока, обусловленная смещением витков вдоль оси. Рассмотрите ток как суперпозицию кругового тока, созданного листом, свернутым в цилиндр, и продольного тока, текущего по образующим другого цилиндра, как показано на рисунке. Опишите магнитное поле такого листа и трубки тока внутри и снаружи цилиндра (считайте, что цилиндр имеет бесконечно большую длину). Можете ли вы связать отношение величин поля внутри и вне цилиндра с шагом обмотки спирали, которую образует это распределение тока?



К задаче 6.22.

**6.22.** Основной целью этой задачи является определение вращающего момента, который действует на петлю с током в постоянном магнитном поле. Постоянное поле  $\mathbf{B}$  имеет некоторое направление в пространстве. Направим координатные оси таким образом, что вектор  $\mathbf{B}$  будет перпендикулярен к оси  $x$ , а петля с током расположится в плоскости  $xy$ , как показано на рисунке. Форма и размеры петли произвольны; ток к петле подводится по скрученным проводам, и результирующая сила, действующая на эти провода, равна нулю. Рассмотрим малый элемент петли и определим его вклад во вращающий момент относительно оси  $x$ . На него будет

действовать только  $z$ -компонента силы и  $\hat{y}$ , следовательно, только  $y$ -компонента поля  $\mathbf{V}$ , обозначенная на чертеже через  $\hat{y}V_y$ . Составьте интеграл, который дает полный вращающий момент. Покажите, что интеграл, с точностью до постоянных, определяется площадью петли. Магнитный момент петли с током определяется как вектор  $\mathbf{m}$  величины  $Ia/c$ , где  $I$  представляет собой ток в ед. СГСЭ  $q/\text{сек}$  и  $a$  — площадь петли в  $\text{см}^2$ ; направление же вектора перпендикулярно к петле и связано с направлением тока правилом правого буравчика, как показано на чертеже. Покажите теперь, что ваш результат означает, что вращающий момент  $\mathbf{N}$ , действующий на любую петлю с током, определяется векторным равенством

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{V}.$$

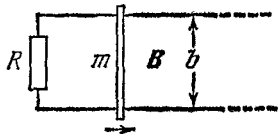
Чему равна результирующая сила, действующая на петлю?

**6.23.** Для некоторых целей необходимо ускорить в циклическом ускорителе отрицательные ионы водорода. Такой ион  $\text{H}^-$  является атомом водорода, к которому присоединен дополнительный электрон. Это соединение довольно неустойчиво и электрическое поле порядка  $1,5 \cdot 10^4$  ед. СГСЭ  $v/\text{см}$  (довольно слабое поле по атомным масштабам) разрушит его. При этом образуются свободный электрон и атом водорода. Мы хотим ускорить ионы  $\text{H}^-$  до кинетической энергии, равной  $1 \text{ Бэ}$ . Каково самое сильное поле, которое можно приложить, чтобы удержать их на круговой орбите до получения конечной энергии? (Для определения величины  $\gamma$  в этой задаче вам потребуется только величина массы покоя иона  $\text{H}^-$ , которая практически равна массе покоя протона, т. е. приблизительно  $1 \text{ Бэ}$ .)

О т в е т.  $V < 8650 \text{ гс}$ .

**6.24.** Один изобретатель предлагает сделать спидометр для самолета, основанный на измерении «индуцированного» электрического поля  $(v/c) \times \mathbf{V}$ . Обсудите выгодные стороны этого предложения. Надо иметь в виду также тот метеорологический факт, что в атмосфере Земли обычно существуют переменные электростатические поля величиной порядка  $10^{-2}$  ед. СГСЭ  $v/\text{см}$ , направление которых меняется. Одно время выдвигалась теория «голубиной навигации», согласно которой голубь, зная каким-то образом свою скорость, чувствует величину «индуцированного» поля  $(v/c) \times \mathbf{V}$ , определяя при этом  $\mathbf{V}$  и, следовательно, свое положение на Земле. Имеет ли это какой-нибудь смысл? Что если измерять само поле  $\mathbf{V}'$  в движущейся повозке? Какую неточность могут внести в предполагаемую величину  $\mathbf{V}$  неизвестные атмосферные электрические поля большой протяженности и величины, порядок которой был приведен выше?

**6.25.** Металлический стержень, имеющий массу  $m$ , скользит без трения по двум длинным параллельным проводящим рельсам, расположенным на расстоянии  $b$  друг от друга. В одном конце рельсы соединены сопротивлением  $R$ ; по сравнению с  $R$  сопротивление стержня и рельсов пренебрежимо мало.



К задаче 6.25.

Перпендикулярно к плоскости рисунка приложено однородное поле  $\mathbf{V}$ . При  $t=0$  стержню сообщается скорость  $v_0$ , направленная вправо. Что тогда произойдет? а) Перестанет ли стержень когда-нибудь двигаться? Если да, то когда? б) На какое расстояние он передвинется? в) Что можно сказать относительно сохранения энергии?

**6.26.** При выводе уравнений (58) относительная скорость систем  $F$  и  $F'$  была направлена вдоль оси  $x$ . Разумеется, это не обязательно. Какой вид примут уравнения преобразования, если скорость направлена вдоль оси  $y$  (не пропустите знака минус)? Вы можете вместо этих формул получить общие формулы для  $E_{\parallel}$ ,  $E_{\perp}$  и т. д.; индексы отвечают компонентам, параллельным или перпендикулярным к скорости  $\mathbf{v}$ .

**6.27.** Предположим, что в направлении оси  $y$  существует однородное электрическое поле  $E_y$ , а в направлении оси  $z$  — однородное магнитное поле  $B_z$ ; пусть  $E_y < B_z$ . Найдите лоренцевскую систему координат, в которой электрическое поле равно нулю. Вычислите величину  $V$  в этой системе. Пусть  $E_y > B_z$ . Можете ли вы в этом случае найти систему координат, в которой электрическое поле равно нулю? Можно ли найти систему координат, в которой магнитное поле равно нулю?

**6.28 Парадокс?** Студент говорит «Вы почти убедили меня, что сила, действующая между токами, которую я считал магнетизмом, объясняется электрическими полями движущихся зарядов. Но, если это так, почему металлическая пластинка на рис. 5.1, *в* не предохраняет один провод от действия другого?» Можете вы объяснить это?

**6.29 Поле вокруг листа с током.** Представим себе ситуацию, при которой компонент магнитного поля, параллельная плоскости листа, имеет одинаковую величину по обе стороны листа, но меняет направление на  $90^\circ$  при прохождении через поверхность. Что здесь происходит? Будет ли на лист действовать сила? Применима ли наша формула для силы, действующей на лист с током, в случаях, подобных этому?

**6.30. Напряжения, вызываемые давлением магнитного поля.** Предположим, что соленоид, описанный в задаче 6.7, применяется для создания очень сильного импульсного поля. Для этого его присоединяют на короткое время к источнику высокого напряжения, который вызовет в нем огромный ток. Пренебрегая всеми остальными ограничениями, рассмотрим предел для величины поля, устанавливаемый прочностью провода на разрыв. Давление магнитного поля, подобно давлению воды в шланге, будет способствовать разрыву соленоида. Если прочность провода на разрыв составляет  $2 \cdot 10^9$  *дин/см<sup>2</sup>*, то какова величина самого сильного поля, которое мог бы выдержать этот соленоид?

О т в е т. 42 *кэс*.

**6.31. Эффект Холла.** При измерении эффекта Холла в металлическом натрии величина поперечного поля оказалась равной 25 *мкв/см* при плотности тока в натриевом проводнике  $1000$  *а/см<sup>2</sup>* и магнитном поле в  $10^4$  *гс*. Сосчитайте число электронов проводимости на  $1$  *см<sup>3</sup>* и сравните его с числом атомов в  $1$  *см<sup>3</sup>* натрия (плотность натрия  $0,97$  *г/см<sup>3</sup>*).

О т в е т.  $n = 2,5 \cdot 10^{22}$  */см<sup>3</sup>*.

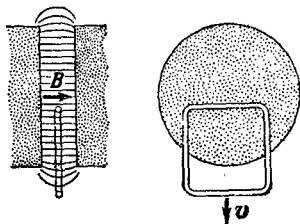
## К главе 7

**7.16.** Фарадей следующим образом описывает неудачную попытку обнаружить индуцированный ток, когда часть контура состояла из воды, движущейся в магнитном поле Земли:

«Я производил опыты под мостом Ватерлоо, растянув медный провод длиной 960 футов по парапету моста и опустив в воду провода с тяжелыми металлическими пластинами, присоединенные к концам медного провода. Таким образом, провод и вода составляли единый проводящий контур; и, поскольку вода убывала и прибывала с приливом, я надеялся получить токи, аналогичные токам бронзового шара. Стрелка гальванометра постоянно отклонялась, но эти отклонения были нерегулярны и вызывались другими причинами. Различная чистота воды у обоих берегов реки; различие температуры; не совсем одинаковые пластины и припой; более или менее совершенный контакт и т. д.; все эти обстоятельства оказывали влияние: и несмотря на то, что я производил опыты только в воде, протекающей под центральными пролетами моста, пользовался платиновыми пластинами вместо медных и применял много других мер предосторожности, я не смог в течение трех дней получить сколько-нибудь удовлетворительные результаты». («Экспериментальные исследования по электричеству», т. 1, стр. 55, Лондон, 1839).

Примите за вертикальную компоненту поля  $0,6$  *гс*, сделайте разумное предположение о величине скорости приливных течений в Темзе и вычислите величину индуцированной разности потенциалов, которую пытался обнаружить Фарадей.

**7.17.** Квадратная металлическая рамка расположена, как показано на рисунке, между полюсами электромагнита. Верхняя сторона рамки находится в области почти однородного горизонтального магнитного поля величиной  $B$ . Нижняя часть рамки расположена вне зазора магнита, где поле, хоть и не равно нулю, но



К задаче 7.17.

в данной задаче может не учитываться. Покажите, что если рамку освободить и она начнет падать под действием собственного веса, то приобретенная рамкой скорость, направленная вниз, зависит только от  $V$  (для данного вещества рамки) и не зависит от размеров рамки и поперечного сечения провода или стержня, из которого она сделана. Чему равна эта скорость (в  $см/сек$ ), если  $V$  равно  $15 \text{ кгс}$  и рамка сделана из алюминия (плотность  $2,7 \text{ г/см}^3$ ; удельное сопротивление  $2,8 \cdot 10^{-6} \text{ ом} \cdot \text{см}$ )? Какое расстояние пройдет рамка, прежде чем достигнет своей конечной скорости?

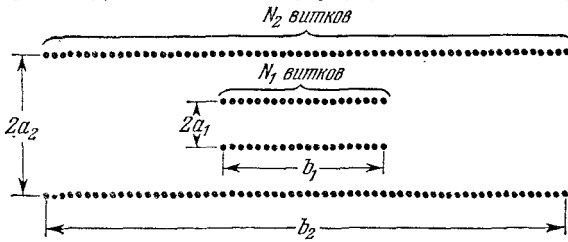
О т в е т.  $v = 0,53 \text{ см/сек}$ .

7.18. Предположите, что петля, движущаяся через поле катушки, изображенной на рис. 7.6, сделана из проволоки с чрезвычайно низким сопротивлением. Вызовет ли электродвижущая сила  $\mathcal{E}$  большой ток в петле? Пусть  $I$  — это ток, который течет по петле, и  $\mathbf{B}_2$  — магнитное поле этого тока. Что вы можете сказать о соотношении между полями  $\mathbf{B}_2$  и  $\mathbf{B}$ ? Что произойдет, если сделать петлю из сверхпроводящего провода с сопротивлением, равным нулю?

7.19. Вопрос, который должен объяснить смысл потока через контур. Рассмотрите применение теоремы  $\Phi_{12} = \Phi_{21}$  в случае большого и малого концентрических колец, изображенных на рис. 7.20. При фиксированном значении тока  $I_1$  в наружном кольце поток через внутреннее кольцо  $\Phi_{21}$  уменьшается с увеличением  $R_1$ , потому что поле в центре становится слабее. Но почему при фиксированном токе во внутреннем кольце поток  $\Phi_{12}$  через наружное кольцо должен уменьшаться при увеличении  $R_1$ , если  $R_2$  остается постоянным? Этого требует наша теорема.

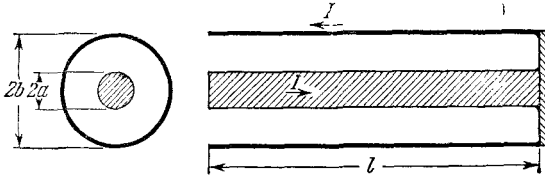
7.20. Применение теоремы взаимности для взаимной индуктивности. Можете ли вы указать способ применения теоремы  $\Phi_{21} = \Phi_{12}$  для определения величины магнитного поля, созданного кольцевым током в точках в плоскости кольца, расстояние которых от кольца гораздо больше, чем его радиус? (У к а з а н и е: рассмотрите действие небольшого изменения  $\Delta R_1$  в радиусе наружного кольца (рис. 7.20); оно должно одинаково действовать на  $\Phi_{12}$  и на  $\Phi_{21}$ .)

7.21. Взаимная индуктивность концентрических соленоидов. На рисунке изображен соленоид радиусом  $a_1$  и длиной  $b_1$ , расположенный внутри длинного соленоид радиусом  $a_2$  и длиной  $b_2$ . Общее число витков равно  $N_1$  для внутреннего соленоид и  $N_2$  для наружного. Выведите формулу для взаимной индуктивности  $M$ .



К задаче 7.21.

7.22. Вычисление самоиндукции с помощью выражения для энергии. Внутренний провод коаксиальной линии передачи, изображенный на рисунке, сделан

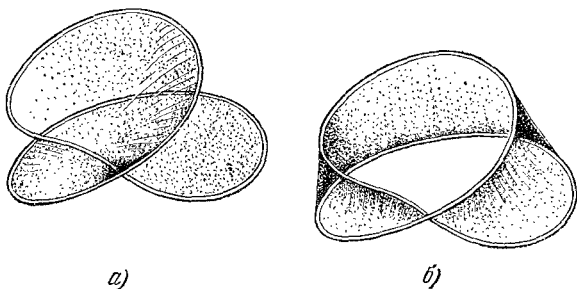


К задаче 7.22.

из твердого металлического стержня радиусом  $a$ . Наружным проводником является тонкая металлическая трубка радиусом  $b$ . На одном конце к обоим проводникам припаян металлический диск. Мы хотим определить самоиндукцию  $L$  участка линии длиной  $l$ . Предположите, что ток, текущий во внутреннем проводнике, рав-

номерно распределен по поперечному сечению стержня. Чему равна, при заданном значении тока  $I$ , величина магнитного поля  $B$  как функция радиуса внутри стержня и вне его? Вычислите полную энергию, запасенную в магнитном поле. Теперь примените общую формулу, согласно которой запасенная энергия равна  $\frac{1}{2} LI^2$ , и найдите  $L$ . Заметьте, что при этом способе вычисления не возникает недоумения в связи с тем, что различные нити тока во внутреннем проводнике охватывают различные количества потока. Результат, однако, пригоден только для медленно изменяющихся токов. Почему?

7.23. Рассмотрите проволочную петлю, изображенную на рисунке. Предположим, что нам нужно вычислить поток  $B$  через эту петлю. На рис. *a* и *б* показаны, соответственно, две поверхности, натянутые на петлю. В чем состоит основная



К задаче 7.23.

разница между ними? Какая из них является правильной поверхностью, которую можно использовать для нахождения потока с помощью поверхностного интеграла  $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$ ? Опишите соответствующую поверхность для катушки с тремя витками.

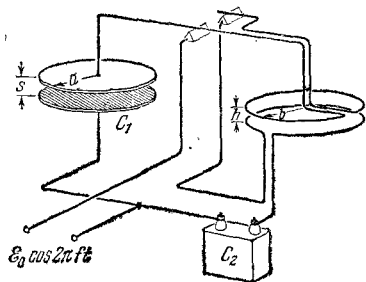
Покажите, что все это находится в согласии с нашим предыдущим утверждением, что для компактной катушки с  $N$  витками электродвижущая сила в  $N$  раз больше, чем для одиночной петли такого же размера и формы.

7.24. Явление Араго. В § 2, цитированном в начале гл. 7, Фарадей ссылается на «замечательные опыты Араго». В разделе, озаглавленном «Объяснения магнитного явления Араго», он описывает его следующим образом:

«Если медная пластинка поворачивается вблизи от магнитной стрелки или от магнита, подвешенного таким образом, что он может вращаться в плоскости, параллельной плоскости пластинки, то магнит стремится следовать за движением пластинки; если же поворачивается магнит, пластинка стремится следовать за его движением; и это взаимодействие является настолько сильным, что поворачивает магниты, или пластинки, весом в несколько фунтов. Если магнит и пластинка неподвижны друг относительно друга, то между ними нельзя наблюдать ни малейшего взаимодействия, ни притяжения, ни отталкивания. Это и есть явление, открытое Араго».

Дайте ваше собственное объяснение явлению Араго.

7.25. Определение скорости света по опытам с электричеством. Постоянную  $c$ , которая входит в уравнения Максвелла, можно определить при помощи опытов с электричеством, используя только низкочастотные поля. Рассмотрите установку, изображенную на рисунке. Сила взаимодействия между пластинами конденсатора уравновешена силой, действующей между параллельными проводами с током, текущим в обоих проводах в одинаковом направлении. К плоскому конденсатору



К задаче 7.25.



$C_1$ , а также к конденсатору  $C_2$  приложено синусоидально изменяющееся напряжение с частотой  $f$  гц. Ток в кольцах возникает благодаря зарядам, вытекающим и вытекающим из конденсатора  $C_2$ . Предположите, что  $C_2$  и соответствующие расстояния подобраны таким образом, что сила, направленная вниз и действующая на верхнюю пластину конденсатора  $C_1$ , в точности уравнивает силу, направленную вниз и действующую на верхнее кольцо. (Конечно, баланс весов не должен нарушиться при перемене знака напряжения.) Покажите, что при выполнении этих условий постоянную  $c$  можно вычислить на основании измеренных величин по следующей формуле:

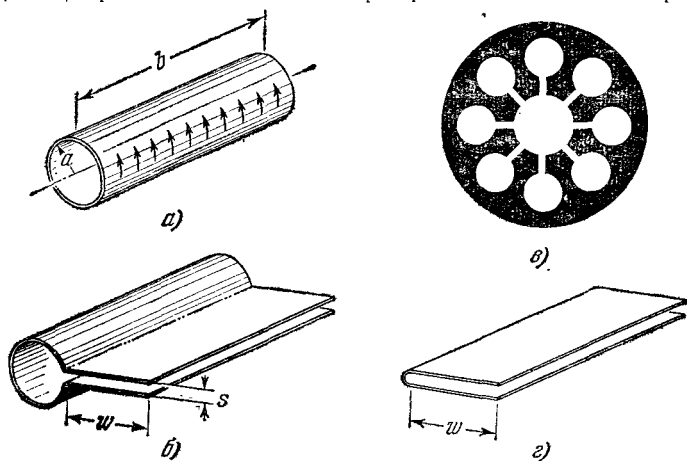
$$c = (2\pi)^{3/2} a \left( \frac{b}{h} \right)^{1/2} \left( \frac{C_2}{C_1} \right) f \text{ см/сек.}$$

Обратите внимание на то, что, кроме отношения двух емкостей  $C_1$  и  $C_2$  нужны измерения только расстояния и времени (или частоты). Электрические единицы в результат не входят. (Опыт реально осуществим при частоте в 60 гц, если емкость  $C_2$  выбрана, скажем, в  $10^6$  больше  $C_1$  и если кольца с током имеют несколько витков для увеличения действия слабого тока.)

7.26. Обсудите возможность передачи сигнала на расстояние с помощью электромагнитной индукции. Осуществим ли беспроволочный телеграф, основанный только на законе индукции Фарадея?

### К главе 8

8.8. Показано, в чем особенность критического затухания. Получите выражение для полной энергии, запасенной в контуре RLC с большим затуханием (см. рис. 8.2); эта энергия в любой момент времени  $t$  представляет собой сумму энергий в емкости и в индуктивности. Покажите, что при «критическом затухании» ( $R = 2\sqrt{L/C}$ ) происходит наиболее быстрое рассеивание полной энергии.



К задаче 8.10.

8.9. Влияние затухания на резонансную частоту. Используя уравнения (10) и (13), определите влияние затухания на частоту контура, состоящего из последовательно соединенных  $R$ ,  $L$  и  $C$ . Пусть  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  обозначает частоту контура без затухания. Предположите, что сопротивление достаточно для того, чтобы величина  $Q$  вместо  $\infty$  стала равной 1000. На сколько процентов частота  $\omega$  будет отличаться от частоты  $\omega_0$ ?

О т в е т.  $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 1,2 \cdot 10^{-7}$ .

8.10. Используйте результат задачи 7.7, чтобы написать формулу для самоиндукции проводящего цилиндра с открытыми концами, изображенного на рис. а.

Ток течет по окружностям, показанным стрелками. Как и в задаче 7.7, мы приближенно считаем, что поле всюду внутри цилиндра однородно вплоть до его концов. Теперь разрежьте цилиндр по образующей и включите конденсатор, как это показано на рис. б. Вычислите резонансную частоту такого контура. Обратите внимание на то, что она не зависит от длины  $b$ . Первый магнетрон с резонансной полостью, благодаря которому в период Второй Мировой войны был построен микроволновый радар, имел восемь резонансных контуров такой формы. Поперечное сечение медного анода магнетрона изображено в натуральную величину на рис. в. Определите частоту излучаемой радиации (на частоту мало влияет наличие восьми полостей вместо одной). Предположим, что при фиксированных значениях  $\omega$  и  $s$  мы пытаемся увеличить резонансную частоту, уменьшая диаметр цилиндра до  $a = \frac{1}{2}s$ . Тогда рис. б превратится в рис. г. Будет ли ваша формула справедлива в этом случае? Будет ли действительная частота больше или меньше предсказанной вашей формулой?

## К главе 9

**9.16.** Резонансный контур «с большим  $Q$ », состоящий из медной спирали и конденсатора, сделанного из металлических пластин, смонтирован под колпаком, так чтобы из всей системы можно было выкачать воздух. Когда под колпаком находится воздух при нормальном давлении, измеренная резонансная частота равна  $41,405 \pm 0,002$  Мгц. Если создать под колпаком вакуум, определение частоты дает величину  $41,418 \pm 0,002$  Мгц. Что можно сказать на основании этих данных о диэлектрической постоянной воздуха? Известны ли вам какие-нибудь другие явления, которые приведут к изменению частоты?

О т в е т.  $\epsilon = 1,00063 \pm 0,00015$ .

**9.17.** Явление гидратации играет большую роль в химии водных растворов. Оно состоит в том, что ион в растворе собирает вокруг себя группу молекул воды, которые довольно плотно к нему прилегают. [См., например, G. С. Pimentel, ed., Chemistry an Experimental Science, p. 314 (Freeman, San Francisco, 1963); или L. Pauling, General Chemistry, p. 205 (Freeman, San Francisco, 1953).] Это явление объясняется притяжением между диполем (молекула воды) и точечным зарядом (ион). Вычислите энергию, необходимую для отделения иона, несущего единичный заряд  $e$ , от молекулы воды, считая, что первоначально он расположен на расстоянии в  $1,5 \text{ \AA}$  от эффективного местоположения диполя  $\text{H}_2\text{O}$  (это расстояние в действительности определено довольно скверно, так как молекула воды является распределением зарядов, а не бесконечно малым диполем). Какая часть водной молекулы окажется наиболее близко расположенной к отрицательному иону?

**9.18.** Шар из диэлектрика в однородном поле. Изучая силовые линии на рис. 9.29, можно получить величину диэлектрической постоянной вещества. Линии нанесены довольно точно. Постарайтесь найти некоторую особенность конфигурации поля, которую легко измерить и сравнить с теорией. Получите при этом приближенное значение величины  $\epsilon$ , которое было использовано при построении чертежа.

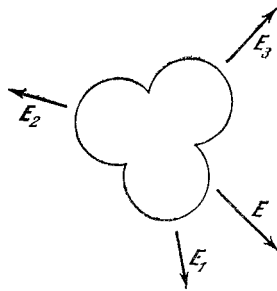
**9.19.** Сферическая полость в диэлектрической среде. В большом конденсаторе на подстанции максимальная величина поля в масле, при полной нагрузке, составляет  $90 \text{ кв/см}$ . Диэлектрическая постоянная масла равна  $2,24$ . Предположите, что в масле имеется пузырек газа. Какова величина поля внутри этого пузырька? (Эта задача обратна задаче с шаром из диэлектрика. Вы можете применить в этом случае результаты, полученные для такого шара.) Является ли присутствие газовых пузырьков в масле конденсатора очень нежелательным?

О т в е т.  $E = 123 \text{ кв/см}$ .

**9.20.** Вопрос для обсуждения. В чем заключается смысл отрицательной поляризуемости? Возможно ли ее существование?

**9.21.** Для некоторых целей тройная симметрия так же хороша, как полная круговая. Представьте себе трехатомную молекулу, состоящую из одинаково расположенных атомов в вершинах равностороннего треугольника. (В действительности такие молекулы неизвестны, но это неважно.) Рассмотрите поляризацию этой

молекулы электрическим полем, параллельным плоскости треугольника. Из симметрии молекулы следует, что поляризуемость для полей  $E_1$ ,  $E_2$  и  $E_3$ , направления которых показаны на рисунке, должна быть одинаковой. Покажите, разлагая поле на составляющие и используя принцип суперпозиции, что поляризуемость останется такой же для любого поля  $E$ , параллельного плоскости. Этим вы докажете, что в отношении поляризуемости в плоскости любая молекула с тройной симметрией не отличается от молекулы с полной круговой симметрией. Аналогичная теорема для трех измерений утверждает, что четырехгранная молекула метана, изображенная на рис. 9.13, должна иметь сферически симметричную поляризуемость.



К задаче 9.21.

**9.22. Доказательство симметрии тензора поляризуемости.** Задача состоит в проверке симметрии тензора поляризуемости. Для простоты будем работать в двух измерениях, но этого вполне достаточно для выявления сущности дела, и третье измерение не внесет ничего нового. У нас имеется

некий поляризуемый предмет, вообще не обладающий никакой симметрией, который мы расположим в плоскости  $xy$ . Поле  $E$  индуцирует дипольный момент  $p$ , который связан с  $E$  следующей линейной зависимостью:

$$p_x = \alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y, \quad p_y = \alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y. \quad (1)$$

Мы должны доказать, что  $\alpha_{xy}$  и  $\alpha_{yx}$  равны.

Доказательство основано на законе сохранения энергии. Если в приложенном поле  $E$  дипольный момент системы меняется от  $p$  до  $p+dp$ , то работа, совершенная полем, равна  $dW = E \cdot dp$ . В самом деле (см. раздел 9.14),  $dp$  представляет собой произведение смещения на заряд при изменении  $p$ . Отсюда следует, что величина  $E dp$  действительно является работой поля  $E$ . Предположим, что система расположена в поле  $E_1$  и обладает дипольным моментом  $p_1$ , который выражается, естественно, уравнением (1). Назовем это состоянием I. Изменим теперь величину приложенного извне поля до значения  $E_2$ . Дипольный момент изменится и будет равен  $p_2$ , а для перевода системы в состояние II будет совершена определенная работа, равная  $W_{12}$ . Заметим теперь, что это изменение состояния можно выполнить многими различными путями, однако произведенная работа должна быть одинаковой для всех этих путей, если закон сохранения энергии выполняется. Действительно, конечное состояние системы для всех возможных путей перехода одно и то же, а именно поляризация, характеризующаяся дипольным моментом  $p_2$ . Допустим, что в состоянии I  $E_1=0$ ,  $p_1=0$ , и сравним два особенно простых пути перехода системы в положение II. Эти две возможности изменения поля от нулевого значения до  $E_2$  с компонентами  $E_{2x}$  и  $E_{2y}$  приведены ниже:

Первый путь:

Оставляем  $E_y=0$ ; изменяем  $E_x$  до  $E_{2x}$ . Работа=

Оставляем  $E_x=E_{2x}$ ; изменяем  $E_y$  до  $E_{2y}$ . Работа=

Полная работа=

Второй путь:

Оставляем  $E_x=0$ ; изменяем  $E_y$  до  $E_{2y}$ . Работа=

Оставляем  $E_y=E_{2y}$ ; изменяем  $E_x$  до  $E_{2x}$ . Работа=

Полная работа=

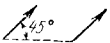
Работа, совершенная в первой стадии первого пути, равна  $\int_{E_x=0}^{E_x=E_{2x}} E_x dp_x$ , а  $dp_x$

можно выразить через  $dE_x$  из уравнения (1). Найдите полную работу, совершаемую в обоих случаях, и покажите, что обе работы равны друг другу.

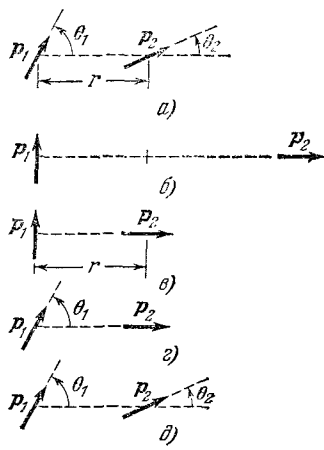
**9.23. Поведение тензора при вращении системы координат.** Чтобы понять, как преобразуются элементы тензора при повороте системы координат, рассмо-

трите для простоты двумерный случай. Предположим, что двумерные векторы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  в определенной системе координат  $x, y$  связаны следующими линейными соотношениями:  $B_x = \alpha_{xx}A_x + \alpha_{xy}A_y$ ;  $B_y = \alpha_{yx}A_x + \alpha_{yy}A_y$ . Коэффициенты  $\alpha$  составляют тензор. Рассмотрим теперь систему осей  $x'$  и  $y'$ , повернутую против часовой стрелки на угол  $\theta$  относительно осей  $x$  и  $y$ . В новой системе координат векторы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ , которые мы считаем неподвижными в пространстве, имеют другие компоненты,  $A'_x$  и т. д. Как выразить эти новые компоненты через старые? Воздействие тензора  $\alpha$  на вектор  $\mathbf{A}$  должно давать тот же вектор  $\mathbf{B}$ . Если это так, то каково соотношение между новыми и старыми элементами тензора? Предположим, что  $\alpha_{xy} = \alpha_{yx}$ . Покажите, что эта симметрия тензора сохраняется при повороте и что можно найти такой угол  $\theta$ , при повороте на который эти перекрестные коэффициенты равны нулю. Аналогичный анализ при наличии трения можно провести и в трехмерной системе координат. Мы получим тогда правило преобразования тензора, подобного тензору поляризуемости.

**9.24. Сила, действующая между двумя диполями.** Изучение силы взаимодействия между диполями. Два диполя, расположенных таким образом:  $\rightarrow \rightarrow -$  притягивают друг друга; два диполя, расположенных таким образом:  $\uparrow \uparrow$  — отталкиваются. Объясните причину. Определите величину силы для каждого случая. Вы можете считать диполь двумя точечными зарядами, расположенными на небольшом расстоянии друг от друга. От какой степени расстояния зависит сила? Рассмотрите теперь два диполя, расположенных следующим образом:

 Как направлена сила, действующая на каждый диполь? (Это — хороший пример нецентральной силы. Такие силы неэлектрического происхождения играют большую роль в ядре. Из-за наличия таких сил ядро дейтерия является не совсем сферическим; оно слегка вытянуто наподобие сигары. Благодаря этому факту и было установлено наличие нецентральных сил в ядре.)

**9.25. Энергия пары диполей.** Два постоянных диполя с дипольными моментами  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$  расположены, как показано на рис. а; расстояние между ними равно  $r$  см, углы, составляемые диполями с соединяющей их линией, равны  $\theta_1$  и  $\theta_2$  соответственно. Задача состоит в вычислении энергии этой системы, т. е. энергии, необходимой для приведения диполей в такое положение из бесконечности. В эту энергию не входит энергия, связанная с созданием самих диполей. Величины диполей предполагаются заданными, но направления их могут меняться. Диполи можно перенести в их конечные положения различными путями, и полная работа, затраченная на этот перенос, должна быть одинаковой во всех случаях. Одной из возможностей, облегчающей вычисление работы, является следующая: начните с диполями  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$ , расположенных на очень большом расстоянии друг от друга и направленных, как показано на рис. б. Сохраняя это направление, перемещайте  $\mathbf{p}_2$  справа налево до тех пор, пока расстояние от него до  $\mathbf{p}_1$  не будет равно  $r$ . На это перемещение работа не затрачивается. Почему? Поверните  $\mathbf{p}_1$  на угол  $\theta_1$ . Вычислите работу, затраченную на этот поворот в поле диполя  $\mathbf{p}_2$ , направление которого пока остается прежним ( $\theta = 0$ ). Затем поверните  $\mathbf{p}_2$  на угол  $\theta = \theta_2$ . Работу, необходимую для такого поворота в поле  $\mathbf{p}_1$ , можно вычислить, разложив вектор  $\mathbf{p}_1$  на продольную компоненту  $p_1 \cos \theta_1$  и поперечную компоненту  $p_1 \sin \theta_1$  и рассмотрев соответствующие поля в месте расположения диполя  $\mathbf{p}_2$  по отдельности. Сложите результаты и покажите, что полная работа равна



К задаче 9.25.

$$W = \frac{p_1 p_2}{r^3} [\cos(\theta_1 - \theta_2) - 3 \cos \theta_1 \cos \theta_2].$$

**9.26. Энергия дипольных цепочек.** Для этой и следующей задачи вам понадобится решение задачи 9.25 для некоторых очень простых ориентаций двух диполей. Рассмотрите линейный ряд диполей с моментом  $p$ , расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга, растянутый от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Положения диполей фиксированы, но каждый диполь может свободно поворачиваться в любом направлении вокруг оси, перпендикулярной к плоскости чертежа. Найдите расположение, отвечающее наименьшей энергии. Конечно, если ряд бесконечен, то и полная энергия может быть бесконечно большой, но нас интересует энергия, приходящаяся на единицу длины. Сравните средние энергии, приходящиеся на диполь для следующих расположений:

- а) ... ↑↑↑↑ ...  
 б) ... ↑↓↑↓ ...  
 в) ... →→→→ ...  
 г) ... ←→←→ ...

Какие из них обладают наивысшей и наименьшей энергией?

**9.27.** Найдите разность энергий для бесконечного ряда диполей, расположенных следующим образом: ... →→→→ ... — и ряда, в котором, вправо от определенной точки  $b$ , все диполи повернуты на  $180^\circ$

$$\dots \rightarrow \rightarrow b \leftarrow \leftarrow \dots$$

Эта разность энергий соответствует энергии, связанной с наличием границы  $b$

между двумя доменами (математическое указание:  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \frac{\pi^2}{6}$ ). Сравните при-

ближенно энергию ряда с двумя такими границами, расположенными на довольно большом расстоянии друг от друга, ... → →  $b$  ← ← ... ← ←  $b$  → → ... с энергией ряда, в котором эти две границы сходятся настолько близко, насколько это возможно, чтобы не уничтожить друг друга

$$\dots \rightarrow \rightarrow b \leftarrow b \rightarrow \rightarrow \dots$$

Можно ли на основании полученной разности энергий утверждать, что две границы стремятся оттолкнуть или притянуть одна другую?

Существует ли возможность поворота диполей с меньшей затратой энергии, чем при переповорачивании, с которым мы имели дело до сих пор? Сравните следующие виды поворотов. Может быть, вам удастся предложить способ поворота, требующий меньшего расхода энергии?

- а) (переповорачивание): ... → → ← ← ...  
 б) ... → → ↑ ← ← ...  
 в) ... → → ↘ ↙ ← ← ...

**9.28. Соотношение, выражаемое уравнением (72), называется формулой Клаузиуса — Мосотти.** Обычно оно содержит диэлектрическую постоянную  $\epsilon$ . Пока-

жите, что эквивалентная формула этого соотношения имеет вид  $\frac{3}{N} \left( \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \right) = 4\pi\alpha$ .

Ниже приведена таблица численных значений, взятых из статьи Майкlesa, Джасгерса и Сандерса (*Physica* 1, 627 (1934)), которые измеряли диэлектрическую постоянную чистого азота при различных давлениях и температурах.

Температура, °C	23,8	23,8	23,8	23,8
Давление, атм	1,02	57,5	221,6	1011,6
Плотность, г/см <sup>3</sup>	0,00118	0,06604	0,2361	0,5780
Диэлектрическая постоянная	1,00052	1,03109	1,11413	1,29633

Насколько хорошо согласуются эти значения с формулой Клаузиуса — Мосотти?

**9.29. Вопрос для обсуждения; «катастрофа  $4\pi Na/3$ ».** Может ли в действительности произойти катастрофа, предсказываемая уравнением (72), в случае  $4\pi Na/3 \geq 1$ ? Для уяснения этого вопроса рассмотрите «кристалл», состоящий только из двух одинаковых атомов А и В, каким-то образом закрепленных на расстоянии  $d$  см друг от друга. Покажите, что если атом А поляризован параллельно линии АВ, то он создает поле около атома В, которое стремится поляризовать В в том же направлении. Возможно ли, чтобы система могла «закрепиться» в поляризованном состоянии, в котором поле А сохраняет поляризацию В и наоборот? Обсудите этот вопрос с двух точек зрения. Во-первых, вычислите расстояние, на котором это возможно для атомов А и В, если поляризуемость каждого равна  $\alpha$  см<sup>3</sup>. Как это связано с предполагаемыми размерами А и В? Во-вторых, рассмотрите энергию гипотетической поляризованной системы.

**9.30. «Искусственный» диэлектрик.** Для фокусировки коротких радиоволн служат искусственные диэлектрики. Они представляют собой небольшие металлические шарики, уложенные на пенопластовой матрице, подобно атомам в кристаллической решетке. Сам пенопласт служит только для фиксации положения шариков; его электрическое действие пренебрежимо мало. Поляризуемость металлического шарика легко вычислить, воспользовавшись задачей 9.9. Определите диэлектрическую постоянную кубической структуры металлических шариков диаметром 2,5 см, центры которых расположены на расстоянии 5 см друг от друга. Можно ли сделать  $4\pi Na/3 > 1$  для такого расположения? Наибольшего успеха вы добьетесь с кубической гранцентрированной структурой, отвечающей одной из самых плотных упаковок шариков. Какая теорема была бы нарушена, если бы совокупность металлических шариков могла обладать спонтанной индуцированной поляризацией?

## К главе 10

**10.14.** При обсуждении рис. 10.9 мы предположили для простоты, что поле В имеет осевую симметрию, т. е. что  $B_r$  постоянно на окружности с центром на оси. Покажите, что это в действительности не является необходимым, другими словами, что мы получим уравнение (18), даже если величина  $B_r$  не постоянна на окружности.

**10.15.** Цилиндрический соленоид имеет однослойную обмотку радиусом  $r_0$  и такую длину, что у его конца поле можно считать равным полю полубесконечного соленоида. Покажите, что точка на оси соленоида, в которой маленький парамагнитный образец будет испытывать максимальную силу, расположена на расстоянии  $r_0/\sqrt{15}$  от конца соленоида.

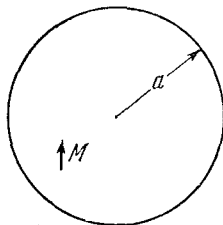
**10.16.** Среднее поле в ближней области для конечного электрического диполя и кольца с током. В случае электрического диполя, состоящего из двух зарядов  $Q$  и  $-Q$ , разделенных расстоянием  $s$ , объем ближней области, в которой поле существенно отлично от поля идеального диполя, пропорционален  $s^3$ . Поле в этой области пропорционально  $Q/s^2$ . Дипольный момент  $p=Qs$ ; если мы уменьшим  $s$ , оставляя постоянным  $p$ , что произойдет с произведением объема на величину поля? Проведите соответствующее доказательство для магнитного поля петли с током. Отсюда можно сделать следующий вывод: если нас интересует усредненное по объему поле в любом объеме, содержащем диполи, существенное различие между «внутренним содержанием» электрического и магнитного диполей игнорировать нельзя, даже если мы считаем диполи бесконечно малыми.

**10.17. Магнитное обнаружение подводных лодок.** Подводная лодка со стальной обшивкой вызывает местное возмущение в магнитном поле Земли, благодаря чему лодку можно обнаружить с помощью прибора, чувствительного к очень слабым изменениям поля. Предположим, что у нас имеется магнитометр, который можно буксировать на некотором расстоянии от самолета (для того чтобы на него не действовало возмущение, создаваемое самим самолетом) и который способен регистрировать флуктуацию порядка  $10^{-5}$  от основного поля. Даже если обшивка подводной лодки была полностью размагничена, так что никакого намагничивания не осталось, она все же представляет собой аномальную магнитную среду по отношению к полю Земли, и мы можем ожидать, что эта обшивка создаст индуцированный дипольный момент, достаточно большой, чтобы изменить поле Земли на

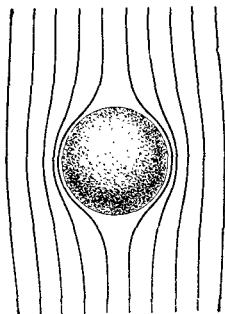
расстоянии, равном длине лодки, грубо говоря, на величину невозмущенного поля. Если дело обстоит таким образом, то чему равно максимальное расстояние, на котором может быть обнаружена лодка? Предположим, что при некотором изменении в конструкции магнитометра его чувствительность может быть увеличена вдвое. Как это повлияет на расстояние, которое нужно облетать для обследования заданной поверхности океана? (В действительности проблема не так проста, как кажется. Естественные флуктуации поля вызывают такой «уровень шумов», который маскирует аномалию, созданную подводной лодкой, независимо от того, какую чувствительность имеет магнитометр. Один из источников таких флуктуаций — океанские волны перемещают морскую воду в поле Земли; морская вода является проводником; течение воды создает магнитное поле.)

**10.18.** Имеются два полых стеклянных шара диаметром 1,25 см каждый. В одном из них расположен маленький магнитный стержень длиной около сантиметра. Во втором находится электрет — стержень из материала с постоянной электрической поляризацией. Его можно с равным успехом представлять себе как стержень, сделанный из хорошего изолятора с положительным и отрицательным зарядами на его концах. Величина магнитного дипольного момента первого объекта примерно равна величине электрического дипольного момента второго. Рассмотрим задачу обнаружения одного или другого из них, зажатых в кулаке, как в игре «пуговица, пуговица». Как вы объясните различие между ними человеку, который имеет такое же представление о физике, которым обладали вы до начала изучения этого курса?

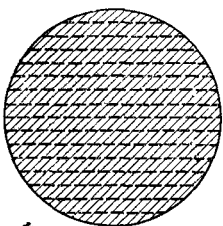
**10.19.** Магнитный диполь величины  $m$  расположен в однородном магнитном поле  $B_0$ , причем направление дипольного момента противоположно направлению поля. Покажите, что в результирующем поле существует определенная сферическая поверхность, в центре которой находится диполь и через которую не проходят силовые линии поля. Внешнее поле, можно сказать, «вытолкнуто» из этой сферы. Силовые линии поля вне сферы начерчены на рисунке. Как будут выглядеть силовые



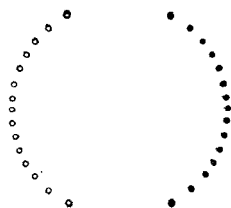
a)



К задаче 10.19.



b)



b)

К задаче 10.20.

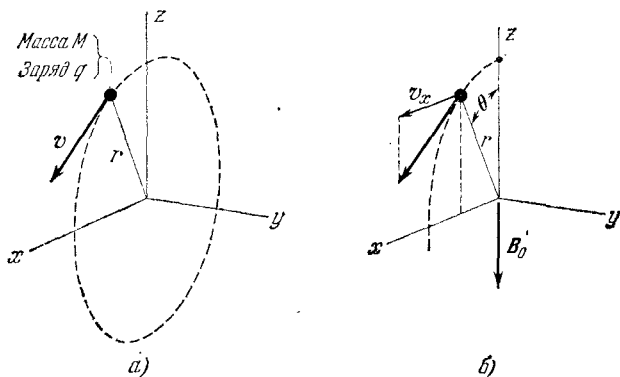
линии поля внутри сферы? Чему равна величина поля непосредственно у сферы на экваторе? Что касается влияния диполя на внешнее поле, то его можно заменить токами, текущими в сферической поверхности, если обеспечить соответствующее распределение тока. Чему равно поле внутри сферы в этом случае? Почему вы можете быть в этом уверены? (Такая конфигурация имеет большое значение при изучении сверхпроводимости. Сверхпроводящая сфера действительно вытолкнет все поле из внутренней части сферы.)

**10.20.** Рассмотрите равномерно намагниченный шар, изображенный на рисунке. Разделив его на слои одинаковой толщины, можно показать, что он эквива-

лентен катушке с током, изображенной на рис. в. Используя эту эквивалентность, рассмотрите форму магнитного поля как внутри, так и снаружи катушки. Сравните катушку с вращающейся заряженной оболочкой в задаче 10.6.

**10.21.** Напишите, какими были бы уравнения Максвелла при существовании магнитных зарядов и токов магнитных зарядов, аналогичных электрическим зарядам и электрическим токам. Придумайте новые обозначения, если они вам потребуются, и тщательно определите, что они выражают. Будьте особенно осторожны со знаками плюс и минус.

**10.22.** Эта задача завершает обсуждение, проводившееся в разделе 10.5, показывая, что произойдет с орбитами электронов, ориентированными в плоскости, параллельной приложенному магнитному полю. В разделе 10.5, иллюстрированном рис. 10.12, мы обсуждали, что произойдет, если магнитное поле будет приложено



К задаче 10.22.

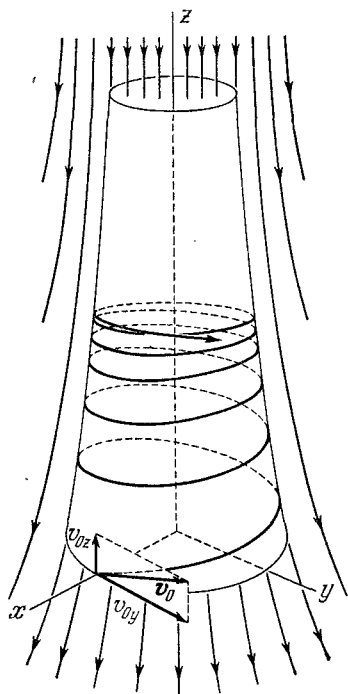
перпендикулярно к плоскости орбиты заряженной частицы, движущейся по кругу под влиянием некоторой силы. Теперь рассмотрите случай поля, лежащего в плоскости орбиты. Все, что вам надо сделать, — это заполнить пропущенные места в следующем ниже тексте, тщательно обдумав каждый шаг: частица массы  $M$  с зарядом  $q$  движется со скоростью  $v$  по круговому пути в плоскости  $xz$ . Она удерживается на этом пути некоторой центральной силой, происхождение которой нас не интересует (см. рис. а). Момент количества движения  $L$ , связанный с этим движением, является вектором, направленным по оси  $z$ , величина которого  $L = \dots$  (покажите на графике). Включим магнитное поле  $\mathbf{B} = -zB$  (рис. б). Возникнет новая сила величиной  $\dots$ , направленная  $\dots$ , которая будет действовать на частицу (укажите на графике). Мы предполагаем, что эта сила настолько слаба, что движение частицы меняется очень медленно. Теперь усредним действие силы по всему круговому пути. Усредненная сила будет равна нулю, но вращающий момент, созданный этой силой, не будет равен нулю. Мгновенное значение вращающего момента относительно оси  $z$  равно  $\dots$  и среднее значение по всему кругу равно  $\dots$ . Следовательно, среднее значение вращающего момента представляет собой вектор  $\mathbf{N}$  величиной  $N = \dots$ , направленный  $\dots$ . Поскольку вращающий момент равен скорости изменения момента количества движения, то вектор  $\mathbf{L}$  будет с течением времени  $\dots$ . Сравнивая это с тем, что происходило, когда плоскость орбиты была перпендикулярна к полю (рис. 10.12), мы наблюдаем, что  $\dots$ . В данном случае движение частицы, с точки зрения наблюдателя, смотрящего на нее вниз с оси  $z$ , будет выглядеть следующим образом: (сделайте набросок).

**10.23.** Свободный электрон в переменном магнитном поле. В разделе 10.5 мы показали, что радиус орбиты заряженной частицы не меняется при включении однородного внешнего поля  $\mathbf{B}$ , изменяется только орбитальная скорость. Но это было справедливо только при условии  $\Delta v \ll v_0$ , которое аналогично утверждению, что магнитная сила  $qvB/c$  гораздо меньше силы  $F_0$ , связывающей частицу с некоторым центром притяжения. Существует интересный случай, в котором это предпо-



ложение, очевидно, не может быть справедливым, — это случай ни с чем не связанного свободного электрона. Что произойдет в этом случае? Чтобы ответить на этот вопрос, начните с частицы с зарядом  $q$  и массой  $M$ , движущейся по кругу в однородном магнитном поле  $\mathbf{B}$ . Это — известная ситуация «циклотрона», удовлетворяющая условию  $Mv^2/r = qvB/c$ . Предположим, что поле  $B$  медленно изменяется. Индуцированное электрическое поле будет увеличивать скорость частиц в направлении движения, и тогда можно применить соотношение  $dv = (qr/2Mc) dB$ , также как это делалось в ряде других случаев. Покажите, что, пользуясь этим соотношением и соотношением для циклотрона, можно получить выражение, связывающее  $B$  и  $r$ . Докажите, что: 1) магнитный момент орбиты остается постоянным при изменении  $B$ ; 2) величина потока  $\Phi$  внешнего поля  $\mathbf{B}$ , охватываемая орбитой, остается постоянной при изменении  $B$ . (Определяя изменение  $B$  как медленное, мы имеем в виду, что оно должно изменяться только на небольшую часть своей величины за время одного оборота. Тогда путь частицы будет почти круговым и каждый оборот будет мало отличаться от предыдущего, поэтому имеет смысл говорить об орбитальном моменте количества движения и о потоке, охватываемом орбитой.)

10.24. Орбиты электронов в сходящемся поле. Выводы 1) и 2) задачи 10.23 особенно полезны для предсказания траекторий электронов (или ионов) в магнитных полях, постоянных во времени, но постепенно



К задаче 10.24.

изменяющихся в пространстве, например, электронов, движущихся вокруг Земли в поясе Ван Аллена. Считая изменение поля  $B$  медленным (см. задачу 10.23), мы имеем дело с полем, которое должно относительно мало изменяться на расстоянии, равном циклотронному радиусу данной частицы. Рассмотрим частный случай магнитного поля, направление которого совпадает с отрицательным направлением оси  $z$ , а величина возрастает в положительном направлении оси  $z$ , как показано с помощью силовых линий на рисунке. Положительная частица пересекает плоскость  $xy$ , двигаясь со скоростью  $v_0$  под некоторым углом вверх. Если смотреть на нее из системы координат, движущейся в направлении оси  $z$  со скоростью  $v_{0z}$ , то мы увидим, что частица движется во внешнем поле  $B_z$ , компонента которого возрастает. Воспользуйтесь теперь выводами задачи 10.23 для объяснения поведения частицы, показанного на рисунке. Заметьте одну особенность: видимому, на частицу действует сила, направленная вниз. Как это объяснить? Помните, что постоянное магнитное поле не совершает работы над заряженной частицей, и обсудите изменение различных компонент скорости, наблюдаемое в лабораторной системе координат. Что нужно знать, чтобы предсказать, на какую высоту поверхности раструба поднимется по спирали частица, прежде чем она пойдет обратно?

10.25. Кажущийся парадокс и задача, объясняющая его. Тот, кто хоть немного знаком с квантовой теорией атома, может быть озадачен одним из результатов действия магнитного поля на орбитальную скорость электрона в атоме (раздел 10.5). При изменении скорости, когда величина  $r$  остается постоянной, изменяется момент количества движения  $mvr$ . Но момент количества движения орбиты электрона в точности равен целому числу, помноженному на постоянную  $h/2\pi$ , где  $h$  — универсальная квантовая постоянная — постоянная Планка. Как может изменяться  $mvr$  без нарушения этого фундаментального квантового закона? Решение этого парадокса важно для квантовой механики заряженных частиц, но не связано с

законами квантовой теории. Когда мы рассматриваем сохранение энергии для частицы, несущей заряд  $q$  и движущейся во внешнем электростатическом поле  $\mathbf{E}$ , мы всегда включаем наряду с кинетической энергией  $\frac{1}{2}mv^2$  потенциальную энергию  $q\phi$ , где  $\phi$  представляет собой скалярный электрический потенциал в месте расположения частицы. Мы не должны удивляться, что в случае количества движения нам необходимо рассматривать не только обычное количество движения  $M\mathbf{v}$ , но также величину, в которую входит векторный потенциал магнитного поля  $\mathbf{A}$ . Оказывается, что количество движения должно выражаться формулой  $M\mathbf{v} + (q/c)\mathbf{A}$ , где  $\mathbf{A}$  — векторный потенциал внешнего поля в том месте, где находится частица. Мы можем назвать  $M\mathbf{v}$  «кинетическим количеством движения», а  $(q/c)\mathbf{A}$  — «потенциальным количеством движения». (В теории относительности необходимость включения величины  $q\mathbf{A}/c$  очевидна, потому что энергия и количество движения образуют четырехвектор; то же самое должно иметь место в случае скалярного и векторного потенциалов поля  $\phi$  и  $\mathbf{A}/c$ .) Момент количества движения, который интересует нас в данном случае, будет, следовательно, равен не

$$\mathbf{r} \times (M\mathbf{v}), \text{ а } \mathbf{r} \times \left( M\mathbf{v} + \frac{q}{c} \mathbf{A} \right).$$

Вернемся теперь к заряду, прикрепленному к концу шнура (рис. 10.12). Проверьте сначала, что векторный потенциал, соответствующий полю  $\mathbf{B}$ , направление которого совпадает с отрицательным направлением оси  $z$ , равен  $\mathbf{A} = (B/2)(-\hat{x}y + \hat{y}x)$ . Затем определите, что произойдет с моментом количества движения

$$\mathbf{r} \times \left[ M\mathbf{v} + \frac{q}{c} \mathbf{A} \right]$$

при включении поля.