

тым. Если бы кто-нибудь когда-либо открыл монополь, он имел бы право триумфально прибавить к уравнению (1) следующие слова: «...за исключением области, где расположен этот северный (или южный) магнитный монополь, обнаруженный на моей фотографической пластинке (или на снимке в пузырьковой камере, или по записи счетчика и т. д.)». Но даже это открытие не повлияет на главный вывод: обычное вещество «сделано» из электрических зарядов, а не из магнитных.

Мы приходим к выводу, что единственными источниками магнитного поля являются электрические токи. Это возвращает нас к гипотезе Ампера, к его идее, что магнетизм можно объяснить множеством крошечных колец электрического тока, распределенных по всему веществу.

10.3. Поле петли с током

Замкнутая проводящая петля расположена в плоскости xu и охватывает начало координат (рис. 10.4, *a*). По петле течет постоянный ток I , измеренный в ед. СГСЭ_q/сек. Нас интересует магнитное поле, создаваемое этим током, но не вблизи петли, а в далеких точках, например в точке P_1 , показанной на рисунке. Предположим, что r_1 (расстояние до P_1) гораздо больше любого размера петли. Для упрощения чертежа мы поместили точку P_1 в плоскости yz ; дальше будет видно, что это ограничение не имеет значения. Для решения задачи удобно использовать векторный потенциал. Вначале вычислим векторный потенциал \mathbf{A} в точке P_1 , т. е. $\mathbf{A}(0, y_1, z_1)$. После этого нам станет ясно, каким будет векторный потенциал в любой другой точке (x, y, z) далеко от петли. Затем, вычислив $\text{rot } \mathbf{A}$, мы получим величину магнитного поля \mathbf{B} .

Для тока, текущего по проводнику, мы имели согласно уравнению (6.35)

$$\mathbf{A}(0, y_1, z_1) = \frac{I}{c} \int_{\text{по всей петле}} \frac{d\mathbf{l}_2}{r_{12}}. \quad (2)$$

Тогда нас интересовал только вклад от небольшого участка контура; теперь мы должны провести интегрирование по всей петле. Рассмотрим изменение знаменателя r_{12} по мере обхода петли. Если точка P_1 расположена далеко, то в первом порядке малости изменение r_{12} зависит только от координаты y_2 сегмента $d\mathbf{l}_2$, а не от x_2 . Это понятно из рис. 10.4, *б*. Следовательно, пренебрегая величинами, пропорциональными $(x_2/r_{12})^2$, мы можем считать равными

которое существует в нашей части Вселенной. В лаборатории мы наблюдаем составные части мира из антивещества, а составных частей «магнитного двойника» мы не наблюдали. Имеется серьезное сомнение в том, что они вообще существуют, и доказано, что если бы они существовали, то должны были бы обладать свойствами совершенно отличными от свойств электрически заряженных частиц.

расстояния r_{12} и r'_{12} , проекции которых на рис. 10.4, б совпадают. И вообще с точностью до первого порядка отношения (размеры петли/расстояние до P_1) мы имеем

$$r_{12} \approx r_1 - y_2 \sin \theta. \quad (3)$$

Рассмотрим теперь два элемента пути dl_2 и dl'_2 , показанных на рис. 10.4, а. Для этих элементов приращения dy_2 равны и направлены в противоположные стороны, и, как мы уже указывали, расстояния r_{12} и r'_{12} равны с точностью до первого порядка. При такой

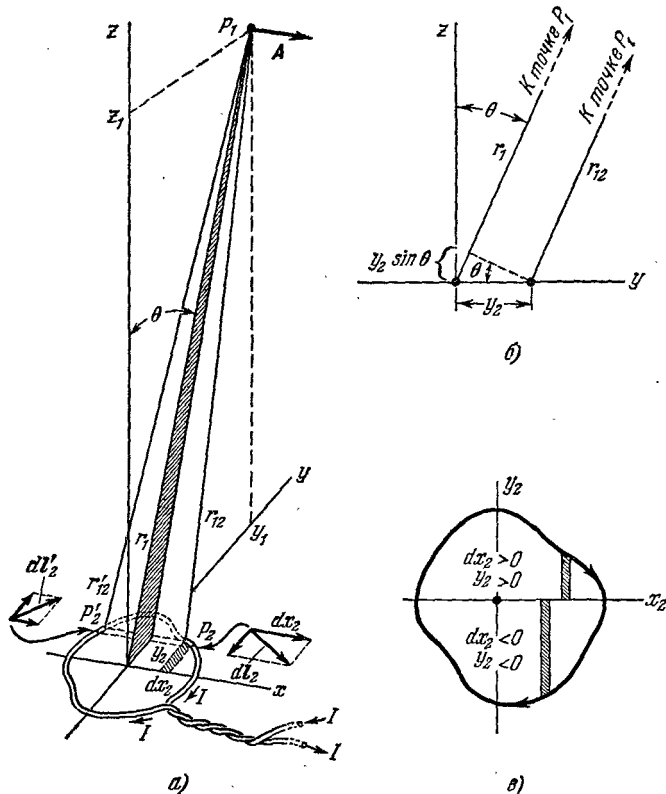


Рис. 10.4. а) Значение векторного потенциала A в точке, удаленной от петли с током. б) Вид сбоку вдоль оси x показывает, что $r_{12} \approx r_1 - y_2 \sin \theta$, если $r_1 \gg y_2$. в) Вид сверху показывает, что $\oint y_2 dx_2$ равен площади петли.

точности их вклады в линейный интеграл будут взаимно уничтожаться и это будет справедливо для всей петли. Следовательно, векторный потенциал A в точке P_1 не будет иметь y -компоненты. Очевидно, что он не будет иметь и z -компоненты, так как сам контур с током нигде z -компоненты не имеет; x -компонента векторного по-

тенциала появляется благодаря той части линейного интеграла, которая связана с dx . Таким образом,

$$A(0, y_1, z_1) = \hat{x} \frac{I}{c} \int \frac{dx_2}{r_{12}}. \quad (4)$$

Не нарушая нашего приближения первого порядка, можно написать уравнение (3) следующим образом:

$$\frac{1}{r_{12}} \approx \frac{1}{r_1} \left(1 + \frac{y_2 \sin \theta}{r_1} \right). \quad (5)$$

Внося это выражение под знак интеграла, получим

$$A(0, y_1, z_1) = \hat{x} \frac{I}{cr_1} \int \left(1 + \frac{y_2 \sin \theta}{r_1} \right) dx_2. \quad (6)$$

В этом интеграле r_1 и θ являются величинами постоянными. Очевидно, что интеграл $\int dx_2$ по петле исчезает. Интеграл же $\int y_2 dx_2$ по петле представляет собой площадь петли, независимо от ее формы (рис. 10.4, в). Окончательно мы получаем

$$A(0, y_1, z_1) = \hat{x} \frac{I \sin \theta}{cr_1^2} \times (\text{площадь петли}). \quad (7)$$

Обратим внимание на простое, но решающее обстоятельство: так как форма петли не имеет значения, наше ограничение в отношении расположения точки P_1 в плоскости yz не может существенно изменить положение. Следовательно, в уравнении (7) должен заключаться искомый результат в общем виде: векторный потенциал петли с током любой формы на расстоянии r , значительно превышающем размеры петли, является вектором, перпендикулярным к плоскости, содержащей r и нормаль к плоскости петли, и имеет величину

$$A = \frac{Ia \sin \theta}{cr^2}, \quad (8)$$

где через a обозначена площадь петли.

Этот векторный потенциал симметричен относительно оси петли, что означает, что поле \mathbf{B} также будет симметрично. Это утверждение можно объяснить тем, что мы рассматриваем области, столь удаленные от петли, что особенности ее формы почти не сказываются. Все петли с одним и тем же произведением (ток \times площадь) создают одинаковое дальнее поле.

Назовем выражение Ia/c магнитным дипольным моментом петли с током и обозначим его через \mathbf{m} . Очевидно, магнитный дипольный момент является вектором, направленным по нормали к петле, т. е. совпадающим по направлению с вектором \mathbf{a} — направленной площадью участка, окруженного петлей:

$$\mathbf{m} = \frac{I}{c} \mathbf{a}. \quad (9)$$

Что касается знака, примем, что направления \mathbf{m} и положительного тока в петле должны быть связаны правилом буравчика с правой резьбой, как показано на рис. 10.5. (Согласно этому правилу дипольный момент петли на рис. 10.4, *a* направлен вниз.) Теперь векторный потенциал для поля магнитного диполя \mathbf{m} можно представить в виде векторного произведения

$$\mathbf{A} = \frac{m \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}, \quad (10)$$

где $\hat{\mathbf{r}}$ — единичный вектор, направленный от петли к точке, в которой вычисляется потенциал \mathbf{A} . Вы можете проверить, что это согласуется с нашим условием относительно знаков. Заметьте, что направление вектора \mathbf{A} всегда должно совпадать с направлением тока в ближайшей части петли.

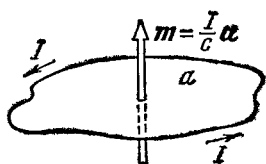


Рис. 10.5. По определению, вектор магнитного момента и направление тока связаны правилом буравчика с правой резьбой, как показано на рисунке.

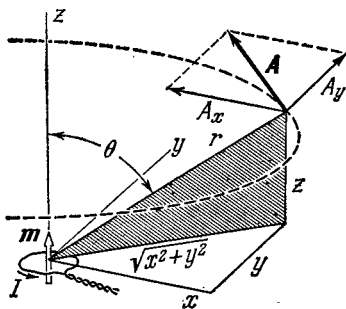


Рис. 10.6. Магнитный диполь расположен в начале координат. В любой точке, далекой от петли, \mathbf{A} представляет собой вектор, параллельный плоскости xy и касательный к окружности с центром на оси z .

На рис. 10.6 показан магнитный диполь, расположенный в начале координат, причем вектор дипольного момента \mathbf{m} совпадает с положительным направлением оси z . Для определения векторного потенциала в любой точке (x, y, z) заметим, что $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, а $\sin \theta = \sqrt{x^2 + y^2}/r$. Модуль A векторного потенциала в этой точке равен

$$A = \frac{m \sin \theta}{r^2} = \frac{m \sqrt{x^2 + y^2}}{r^3}. \quad (11)$$

Так как вектор \mathbf{A} совпадает с касательной к горизонтальной окружности вокруг оси z , то его компоненты равны

$$\left. \begin{aligned} A_x &= A \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = -\frac{my}{r^3}, \\ A_y &= A \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{mx}{r^3}, \\ A_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Вычислим \mathbf{B} для точки в плоскости xz , определяя компоненты $\text{rot } \mathbf{A}$ и затем (а не прежде!) подставляя $y=0$; найдем

$$\left. \begin{aligned} B_x &= (\nabla \times \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \frac{mx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{3mxz}{r^5}, \\ B_y &= (\nabla \times \mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{-my}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{3myz}{r^5}, \\ B_z &= (\nabla \times \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = m \left[\frac{-2x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x^2-2y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \right] = \frac{m(3z^2-r^2)}{r^5}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

В xz плоскости $y=0$, $\sin\theta=x/r$ и $\cos\theta=z/r$. Компоненты поля в любой точке этой плоскости, следовательно, равны

$$\left. \begin{aligned} B_x &= \frac{3m \sin \theta \cos \theta}{r^3}, \\ B_y &= 0, \\ B_z &= \frac{m(3 \cos^2 \theta - 1)}{r^3}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Вернемся к разделу 9.3, где формулами (9.14) были даны компоненты в плоскости xz поля \mathbf{E} электрического диполя \mathbf{p} , ориентированного так же, как наш магнитный диполь \mathbf{m} . Выражения являются одинаковыми. Таким образом, мы нашли, что магнитное поле, создаваемое небольшой петлей с током, имеет в удаленных точках такую же форму, как электрическое поле, создаваемое двумя разделенными зарядами. Нам известен вид поля электрического диполя. На рис. 10.7 сделана попытка изобразить трехмерную форму магнитного поля \mathbf{B} , создаваемого нашей петлей с током, имеющей дипольный момент \mathbf{m} .

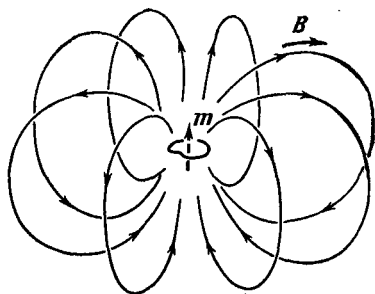


Рис. 10.7. Некоторые силовые линии поля магнитного диполя, т. е. малой петли с током.

Магнитное поле вблизи петли с током совершенно не похоже на электрическое поле вблизи пары разведенных зарядов разного знака, что показано на рис. 10.8. Заметьте, что между зарядами электрическое поле направлено вниз, в то время как внутри кольца с током магнитное поле направлено вверх, но дальние поля совершенно одинаковы. Такой вид магнитного поля петли подтверждает, что наше магнитное поле всюду, даже внутри источника, удовлетворяет уравнению $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Силовые линии магнитного поля не имеют конца. Под «близким» и «далеким» мы понимаем, конечно, расстояния, измеренные в масштабе размеров петли с током или расстоя-

ния между зарядами. Представив себе, что кольцо уменьшилось, а ток увеличился, но дипольный момент $m = Ia/c$ остался неизменным,

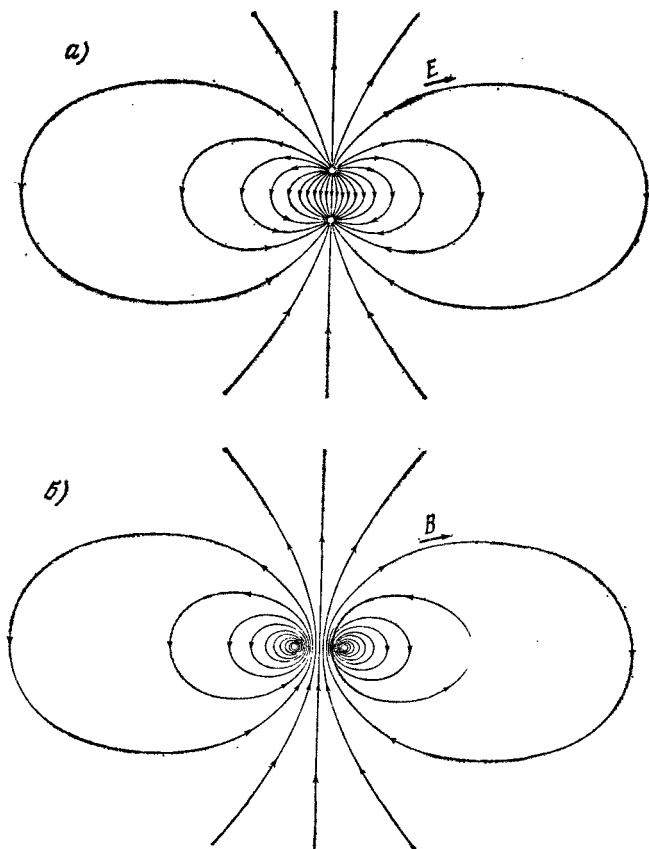


Рис. 10.8. а) Электрическое поле пары равных и противоположных по знаку зарядов. На большом расстоянии от зарядов оно совпадает с полем электрического диполя. б) Магнитное поле кольца с током. На большом расстоянии от кольца поле совпадает с полем магнитного диполя.

мы приблизимся к понятию магнитного диполя бесконечно малого размера, двойника такого же электрического диполя, описанного в гл. 9.

10.4. Сила, действующая на диполь во внешнем поле

Рассмотрим маленькую круговую петлю с током радиусом r , расположенную в магнитном поле, созданном какими-то другими системами с током, например соленоидом. На рис. 10.9 изображено поле \mathbf{B} , направленное приблизительно вдоль оси z . Это поле неоднородно, оно уменьшается по мере продвижения вдоль оси z , что видно по расхождению силовых линий поля.