

Действительно поле  $\mathbf{B}$  магнитного диполя определяется отношением: магнитный дипольный момент / (расстояние)<sup>3</sup>, в то время как  $\mathbf{M}$  по определению имеет размерность [магнитный дипольный момент/объем]. И если мы теперь определим объемную магнитную восприимчивость, обозначенную через  $\chi_m$ , соотношением

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{B} \text{ (предостережение: смотри сноску на стр. 373), (39)}$$

то восприимчивость будет безразмерной величиной, отрицательной для диамагнитных веществ и положительной для парамагнитных. Это в точности аналогично определению электрической восприимчивости  $\chi_e$  отношением электрической поляризации  $P$  к электрическому полю  $E$  (уравнение (9.38)). Мы вскоре убедимся, что аналогия является еще более глубокой, так как макроскопическое поле  $\mathbf{B}$  внутри вещества оказывается равным среднему микроскопическому полю  $\mathbf{B}$ , так же как макроскопическое поле  $\mathbf{E}$  оказывается равным среднему микроскопическому полю  $\mathbf{E}$ .

К сожалению, уравнение (39) не является обычным определением объемной магнитной восприимчивости. В обычном определении вместо поля  $\mathbf{B}$  (см. уравнение (55)) появляется другое поле  $\mathbf{H}$ , с которым мы еще встретимся. Не будучи логичным, определение магнитной восприимчивости через  $\mathbf{H}$  имеет практическое оправдание, и по установившейся традиции мы иногда вынуждены им пользоваться. Но в этой главе мы будем придерживаться, насколько возможно, такого изложения, которое полностью соответствует описанию электрических полей в веществе.

Различие в определении  $\mathbf{M}$  практически не имеет значения, пока число  $\chi_m$  очень мало по сравнению с единицей. Значения  $\chi_m$  для чисто диамагнитных веществ, твердых или жидких, лежат обычно в пределах от  $-0,5 \cdot 10^{-6}$  до  $-1,0 \cdot 10^{-6}$ . Даже для кислорода при условиях, приведенных в таблице, парамагнитная восприимчивость меньше  $10^{-3}$ . Это означает, что магнитное поле, созданное дипольными моментами в веществе, по крайней мере как среднее макроскопическое, гораздо слабее приложенного поля  $\mathbf{B}$ . Это дает нам некоторую уверенность в том, что в таких системах поле, ориентирующее атомные диполи, ничем не отличается от поля, которое имелось бы там в отсутствие образца. Однако нас интересуют и другие системы, в которых поле магнитных моментов не мало. Следовательно, мы должны изучить, так же как в случае электрической поляризации, внутренние и внешние магнитные поля, создаваемые самим намагниченным веществом.

## 10.8. Магнитное поле, созданное намагниченным веществом

Вещество, в котором содержится равномерно распределенное во всем объеме большое количество одинаково направленных атомных магнитных диполей, называется *равномерно намагниченным*. Вектор намагниченности  $\mathbf{M}$  является просто произведением числа ориентированных диполей в единице объема и магнитного момента  $\mathbf{m}$

каждого диполя. Нас не интересует, как сохраняется ориентировка этих диполей. Может быть, приложено какое-нибудь поле от другого источника, но для нас это неважно. Мы будем изучать только поле, которое создается самими диполями.

Рассмотрим вначале пластину вещества толщиной  $dz$ , вырезанную перпендикулярно к направлению намагниченности, как показано на рис. 10.16, а. Пластину можно разделить на ряд элементов. Один такой элемент с площадью поверхности  $da$  обладает полным дипольным моментом, равным  $Mdadz$ , где  $M$  — дипольный момент единицы объема (рис. 10.16, б).

Магнитное поле, создаваемое этим элементом пластины во всех далеких точках (далеких по сравнению с размером элемента), аналогично полю любого диполя с указанным магнитным моментом. Мы можем построить диполь такой величины из проводящей ленты шириной  $dz$ , согнув ее по форме элемента и пропуская по образовавшемуся контуру ток  $I = Mc dz$  (рис. 10.16, в). Тогда дипольный момент контура

$$m = \frac{I}{c} \times \text{площадь} = \frac{Mc dz}{c} da = M da dz \quad (40)$$

будет равен дипольному моменту элемента пластины.

Заменим каждый элемент пластины таким контуром с током, как показано на рис. 10.16, г. Во всех контурах ток одинаков и, следовательно, на каждой внутренней границе текут равные и противоположно направленные токи, так что общий ток равен нулю. Наша «корзина» из контуров эквивалентна, следовательно, одиночной ленте с током  $Mcdz$ , имеющей боковые контуры пластины (рис. 10.16, д). Эти элементы можно сделать сколь угодно малыми, но, конечно, превышающими размеры молекул. В то же время они должны быть достаточно большими, чтобы их намагниченность заметно не изменялась от одного элемента к другому. В этих пределах можно утверждать,

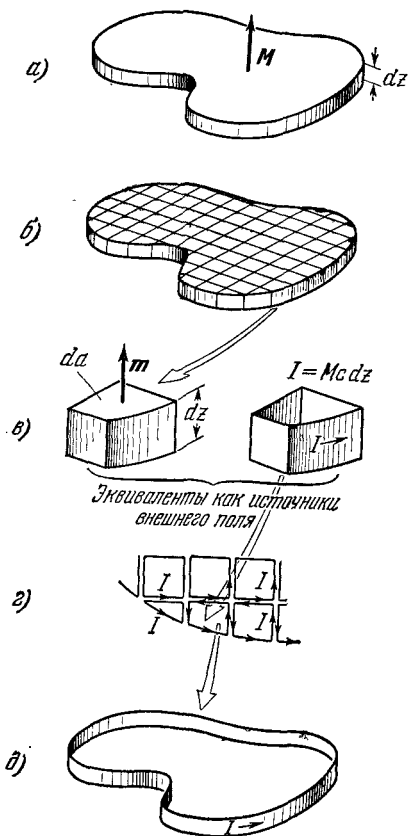


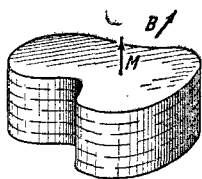
Рис. 10.16. Внешнее поле тонкой пластины, намагниченной перпендикулярно к ее широкой поверхности, эквивалентно внешнему полю ленты с током.

что поле в любой внешней точке, даже вблизи пластины, равно полю ленты с током.

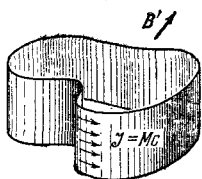
Остается только построить целый блок из таких слоев или пластин, как показано на рис. 10.17, а. Весь этот блок эквивалентен широкой ленте на рис. 10.17, б, по каждой полоске которой течет ток  $Mc dz$  (в ед. СГСЭ<sub>q</sub>/сек). Поверхностная плотность такого тока (в ед. СГСЭ<sub>q</sub>/сек)/см) равна

$$j = Mc. \quad (41)$$

Магнитное поле  $\mathbf{B}$  в любой точке вне намагниченного блока на рис. 10.17, а и даже вблизи блока, но не ближе молекулярных расстояний, равно полю  $\mathbf{B}'$  в соответствующей точке в окрестности широкой ленты с (током рис. 10.17, б).



а)



б)

Что можно сказать о поле внутри намагниченного блока? Здесь перед нами встает такой же вопрос, как и в гл. 9. Магнитное поле в веществе совсем неоднородно, если рассматривать его в атомном масштабе, т. е. как *микроскопическое*. Оно сильно меняется и по величине, и по направлению в точках, расположенных на расстоянии в несколько ангстрем друг от друга. Это микроскопическое поле  $\mathbf{B}$  является просто магнитным полем в вакууме, так как, с микроскопической точки зрения (это подчеркивалось в гл. 9), вещество представляет собой совокупность частиц и электрических зарядов в пустом пространстве. Единственным макроскопическим полем, которое можно однозначно определить в веществе, является усредненное по объему микроскопическое поле.

Рис. 10.17. Однородно намагниченный блок эквивалентен ленте с поверхностным током.

Благодаря отсутствию эффектов, связанных с магнитными зарядами, можно считать, что само микроскопическое поле удовлетворяет уравнению  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ . Если это справедливо, то отсюда непосредственно следует, что усредненное по объему внутреннее микроскопическое поле в нашем блоке совпадает с полем  $\mathbf{B}'$  внутри эквивалентной ленты с током.

Для доказательства рассмотрим длинный стержень, однородно намагниченный параллельно своей длине (рис. 10.18, а). Как мы только что показали, его внешнее поле будет таким же, как поле длинного цилиндра с током (практически эквивалентного однослойному соленоиду), изображенного на рис. 10.18, б. На рис. 10.18, а через  $S$  обозначена замкнутая поверхность, часть которой,  $S_1$ , проходит внутри стержня.

Поскольку и для внутреннего микроскопического поля, и для внешнего поля  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ , то это справедливо во всем объеме, охватываемом поверхностью  $S$ . Из теоремы Гаусса следует тогда, что поверхностный интеграл от  $\mathbf{B}$  по  $S$  должен быть равен нулю. Поверх-

ностный интеграл от  $\mathbf{B}'$  по замкнутой поверхности  $S'$  также равен нулю. Поля  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{B}'$  одинаковы на поверхностях  $S$  и  $S'$ , внешних по отношению к цилиндрам. Следовательно, поверхностный интеграл от  $\mathbf{B}$  по внутреннему диску  $S_1$  должен быть равен поверхностному интегралу от  $\mathbf{B}'$  по внутреннему диску  $S'_1$ . Это должно быть справедливо также для любого из расположенных вплотную параллельных дисков, таких как  $S_2, S_3$  и т. д. на рис. 10.18, в, поскольку поле вне цилиндра в этой окрестности пренебрежимо мало и вклад от наружных частей ничего не меняет. Наиболее хорошим способом вычисления среднего по объему поля  $\mathbf{B}$  в этой области является поэтому вычисление поверхностного интеграла по совокупности равноудаленных плоскостей. Этот метод позволяет беспристрастно исследовать все элементы объема. Отсюда следует, что усредненное по объему микроскопическое поле  $\mathbf{B}$  внутри намагниченного стержня равно полю  $\mathbf{B}'$  внутри полого цилиндра с током на рис. 10.18, б.

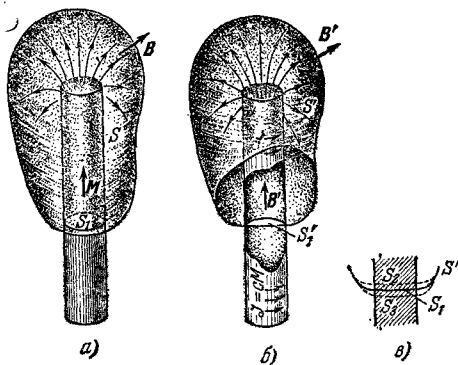


Рис. 10.18. а) Однородно намагниченный цилиндрический стержень. б) Эквивалентный полый цилиндр, или трубка с током. в) Мы можем исследовать внутреннюю часть стержня и получить усредненное по объему микроскопическое поле с помощью близко расположенных параллельных поверхностей  $S_1, S_2, \dots$

Поучительно сравнить вышеприведенные рассуждения с анализом соответствующих вопросов в гл. 9. На рис. 10.19 и 10.20 обе ситуации рассмотрены совместно. Вы видите здесь цепь параллельных рассуждений, но, по существу, в каждом пункте имеются различия, объясняющиеся существенной асимметрией, вытекающей из следующих фактов: электрические заряды служат источниками электрических полей, источниками магнитных полей являются движущиеся электрические заряды. Например, в рассуждениях относительно среднего микроскопического поля, ключом к решению задачи в электрическом случае является предположение, что для микроскопического электрического поля  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ . В случае магнитного поля основой является предположение, что для микроскопического магнитного поля  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ . Если намагниченность  $\mathbf{M}$  в объеме вещества не однородна, а является функцией точки  $\mathbf{M}(x, y, z)$ , то распределение эквивалентного тока выражается формулой

$$\mathbf{J} = c \text{rot } \mathbf{M}. \quad (42)$$

Посмотрим, как это происходит в некотором конкретном случае. Предположим, что имеется намагниченность в направлении оси  $z$ , усиливающаяся по мере продвижения вдоль оси  $y$ . Этот случай приведен на рис. 10.21, а, на котором изображен небольшой

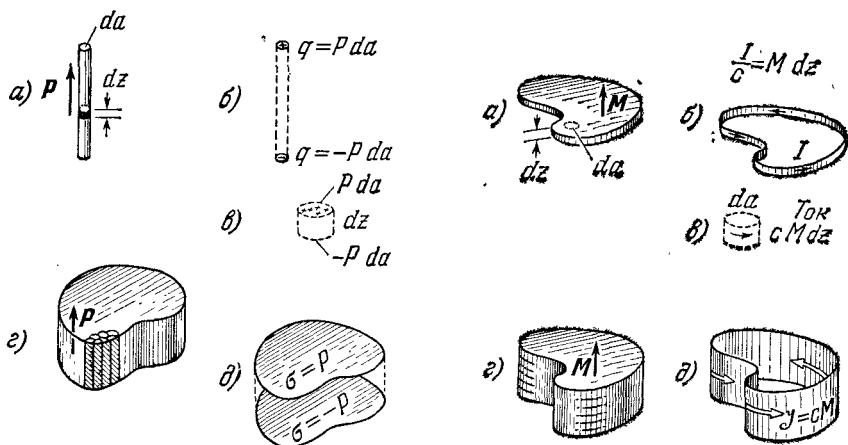


Рис. 10.19. Сравнение электрического и магнитного полей. Левый рисунок. Как источник внешнего электрического поля  $E$  (а) эквивалентен (б), так и элемент поляризованного вещества объемом  $da \cdot dz$  имеет дипольный момент, равный дипольному моменту элементов заряда (в). Однородно поляризованный блок можно разделить на ряд стержней (г). Таким образом, внешнее поле блока аналогично полю двух пластин с поверхностным зарядом  $\sigma = P_n$  (д). (В общем случае для неоднородной поляризации поляризованное вещество эквивалентно распределению заряда  $\rho = -\text{div } P$ .) Правый рисунок. Как источник внешнего магнитного поля  $B$  (а) эквивалентен (б), так и элемент намагниченного вещества объемом  $da \cdot dz$  имеет дипольный момент, равный дипольному моменту элемента тока (в). Однородно намагниченный блок можно разделить на такие слои (г). Следовательно, внешнее поле блока аналогично полю широкой ленты с поверхностным током  $J = cM$  (д). (В общем случае для неоднородной намагниченности намагниченное вещество эквивалентно распределению тока  $J = c \text{ rot } M$ .)

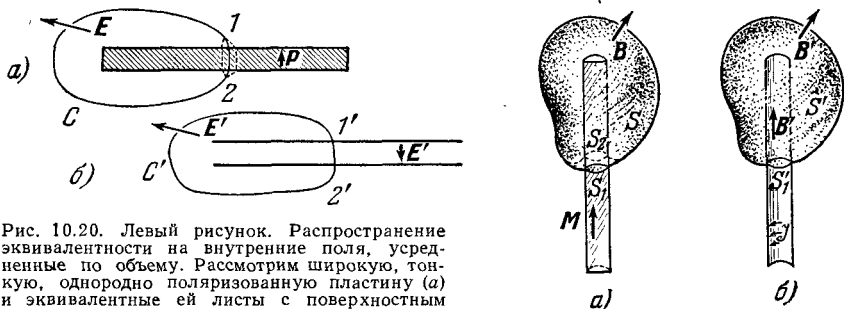


Рис. 10.20. Левый рисунок. Распространение эквивалентности на внутренние поля, усредненные по объему. Рассмотрим широкую, тонкую, однородно поляризованную пластину (а) и эквивалентные ей листы с поверхностным зарядом (б). В середине пластины внешнее поле слабо и поле  $E'$  однородно. Если  $\nabla \times E = 0$  для внутреннего поля, тогда интеграл  $\oint E \cdot dl = 0$ .

Но  $E = E'$  на внешнем пути. Следовательно,  $\int_1^2 E \cdot dl = \int_1^{2'} E' \cdot dl'$  для всех внутренних путей.

Вывод:  $\langle E \rangle = E'$ ; усредненное по объему внутреннее поле равно полю  $E'$ , которое было бы создано в этой точке в пустом пространстве эквивалентным распределением зарядов, рассмотренным выше (совместно с любыми внешними источниками). Правый рисунок. Рассмотрим длинный, однородно намагниченный стержень (а) и эквивалентный ему цилиндр с поверхностным током (б). В середине стержня внешнее поле слабо и поле  $B'$  однородно. Если  $\nabla \cdot B = 0$  для внутреннего поля, тогда интеграл  $\int_S B \cdot da = 0$ . Но  $B = B'$  на поверхности, внешней по отношению к стержню. Следовательно,  $\int_{S_1} B \cdot da = \int_{S'} B' \cdot da'$  по любой внутренней части таких поверхностей, как  $S_1$ ,  $S_2$  и т. д. Вывод:  $\langle B \rangle = B'$ ; усредненное по объему внутреннее магнитное поле равно полю, которое было бы создано в этой точке в пустом пространстве эквивалентным распределением тока, рассмотренным выше (совместно с любыми внешними источниками).

кусок вещества, разделенный на параллелепипеды. Их размеры выбраны столь малыми, что намагниченность внутри каждого можно считать однородной. Заменяем каждый параллелепипед полоской с током, поверхностная плотность которой равна  $\mathcal{J} = cM_z$ . Ток  $I$  в части такой полоски высотой  $\Delta z$  равен  $\mathcal{J}\Delta z$ , или  $cM_z\Delta z$ . Плотность тока в каждой полоске постепенно возрастает и ток в каждой петле больше тока в предыдущей петле на величину

$$\Delta I = c\Delta z \Delta M_z = c\Delta z \frac{\partial M_z}{\partial y} \Delta y. \quad (43)$$

По каждой смежной поверхности этой последовательности параллелепипедов течет результирующий ток величиной  $\Delta I$ , направленный вдоль оси  $x$  (рис. 10.21, в). Для вычисления тока, приходящегося на единицу площади и текущего вдоль оси  $x$ , мы должны помножить  $\Delta I$  на число параллелепипедов, приходящихся на единицу поверхности, которое равно  $1/(\Delta y\Delta z)$ . Таким образом,

$$J_x = \Delta I \left( \frac{1}{\Delta y \Delta z} \right) = c \frac{\partial M_z}{\partial y}. \quad (44)$$

Другой причиной появления тока, направленного по оси  $x$ , является наличие  $y$ -компоненты намагниченности, которая изменяется в направлении оси  $z$ . Рассмотрев этот случай с помощью вертикального столбика из параллелепипедов, вы убедитесь, что возникающая по этой причине плотность тока, направленного вдоль оси  $x$ , дается выражением

$$J_x = -c \frac{\partial M_y}{\partial z}. \quad (45)$$

В общем случае, складывая уравнения (44) и (45), мы получим

$$\vec{J}_x = c \left( \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \right) = c (\text{rot } \mathbf{M})_x, \quad (46)$$

что достаточно для доказательства уравнения (42).

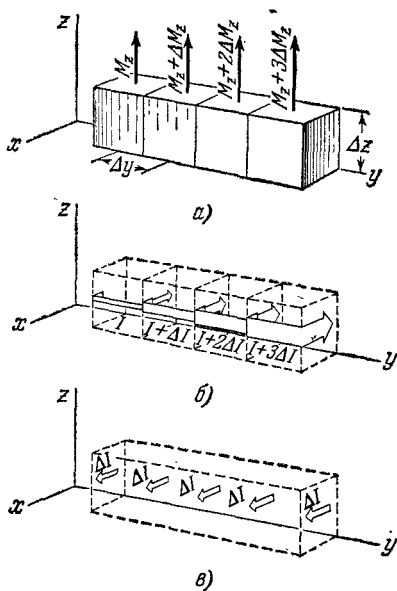


Рис. 10.21. Неоднородная намагниченность эквивалентна объемной плотности тока

$$\Delta M_z = \frac{\partial M_z}{\partial y} \Delta y; \quad \Delta I = \Delta z \cdot \Delta \mathcal{J} = \Delta z \cdot c \Delta M_z;$$

$$J_x = \Delta I \left( \frac{1}{\Delta y \Delta z} \right) = c \frac{\partial M_z}{\partial y}.$$