## 1.10. Закон Гаусса

Возьмем наиболее простой случай: предположим, что поле создано изолированным положительным точечным зарядом $q$ и что поверхностью является сфера радиуса $r$, в центре которой расположен точечный заряд (рис. 1.15). Чему равен поток $\Phi$ через такую поверхность?

Ответить на этот вопрос легко, так как величина поля $\mathbf{E}$ в каждой точке поверхности равна $q/r^2$, а его направление совпадает с наружной нормалью в этой точке.

Итак, мы имеем

$$\Phi = E \times \text{всю площадь} = \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = 4\pi q. \tag{18}$$

Поток не зависит от размеров сферы.

Теперь представим себе вторую поверхность, или оболочку, охватывающую первую, но не сферической формы (рис. 1.16). Мы утверждаем, что полный поток через эту поверхность равен потоку через сферу. Для доказательства рассмотрим конус, выходящий из $q$, вырезающий небольшой элемент **a** на поверхности сферы и продол-

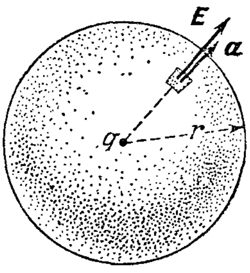


Рис. 1.15. Чему равен наружный поток через сферу для поля **E** точечного заряда $q$?

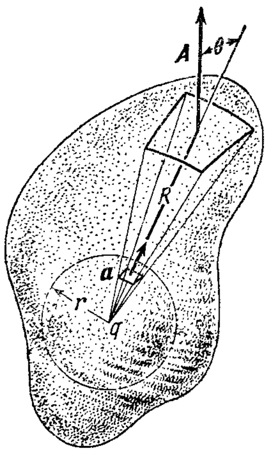


Рис. 1.16. На рисунке показано, что поток через любую замкнутую поверхность вокруг $q$ равен потоку через сферу.

жающийся до внешней поверхности, на которой он вырезает элемент **A**, на расстоянии $R$ от точечного заряда. Площадь элемента поверхности **A** больше площади участка **a** по двум причинам: во-первых, из-за отношения квадратов расстояний $(R/r)^2$ и, во-вторых, из-за того, что наклон элемента поверхности дает множитель $1/\cos\theta$. Угол $\theta$ образован внешней нормалью и радиальным направлением (см. рис. 1.16). Электрическое поле в области нормали меньше поля на сфере на множитель $(r/R)^2$, но направлено также радиально. Если обозначить через $\mathbf{E}_{(R)}$ поле у внешнего участка и через $\mathbf{E}_{(r)}$ поле у сферы, то мы имеем:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{поток через участок наружной поверхности}=\\
&=\mathbf{E}_{(R)}\cdot\mathbf{A}=E_{(R)}A\cos\theta,\\
&\text{поток через участок внутренней поверхности}=\\
&=\mathbf{E}_{(r)}\cdot\mathbf{a}=E_{(r)}\,a,\\
&E_{(R)}\,A\cos\theta=\left[E_{(r)}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\left[a\left(\frac{R}{r}\right)^2\frac{1}{\cos\theta}\right]\cos\theta=E_{(r)}\,a.
\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

Таким образом, потоки через оба участка равны.

Каждую часть внешней поверхности можно совместить с частью сферической поверхности таким образом, что полный поток будет одинаковым через обе поверхности. Иными словами, поток через новую поверхность также должен быть равен $4\pi q$. Но мы рассматривали поверхность произвольной формы и размеров *). Следовательно, поток электрического поля через любую поверхность, охватывающую точечный заряд $q$, равен $4\pi q$. Можно также показать, что полный поток через замкнутую поверхность равен нулю, если заряд расположен вне поверхности. Предоставляем это доказательство читателю. Рис. 1.17 содержит указание на возможный способ доказательства.

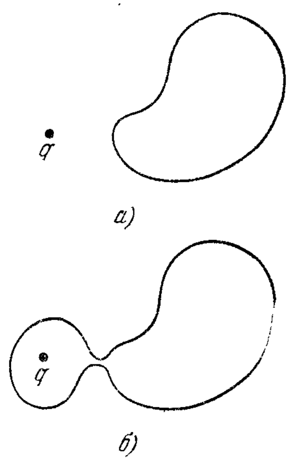


Рис. 1.17. Чтобы показать, что на рис. *а* поток через $S$ равен нулю, можно воспользоваться рис. *б*.

Существует один способ рассмотрения всей этой проблемы, благодаря которому результат становится очевидным. Представим себе, что в точке $q$ расположен источник, излучающий частицы — например, ядра или фотоны — во всех направлениях с постоянной скоростью. Ясно, что поток частиц через отверстие, равное единице площади, будет уменьшаться обратно пропорционально квадрату расстояния от отверстия до $q$. Следовательно, мы можем провести аналогию между напряженностью электрического поля $\mathbf{E}$ и интенсивностью потока частиц, выраженной в ядрах на единицу площади в единицу времени. Довольно очевидно, что поток ядер через любую поверхность, полностью охватывающую заряд $q$, не зависит от размера и формы этой поверхности, так как является полным количеством, излучаемым в единицу времени. Соответственно поток $E$ через замкнутую поверхность не должен зависеть от ее размеров и формы. Это объясняется обратной пропорциональностью интенсивности потока квадрату расстояния.

*) Для большей уверенности мы выбирали такую вторую поверхность, которая охватывает сферу, но это не обязательно. Кроме того, сферу можно выбрать сколь угодно малых размеров.

Применим теперь принцип суперпозиции. Любое электрическое поле является суммой полей отдельных источников. Это свойство было выражено в формулировке закона Кулона (уравнение (13)). Ясно, что поток является аддитивной величиной в том смысле, что если мы имеем некоторое число источников $q_1, q_2, \ldots, q_N$, поля каждого из которых были бы равны $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_N$, то поток $\Phi$ через некоторую поверхность $S$ в реально существующем поле можно выразить равенством

$$\Phi = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_S [\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \ldots + \mathbf{E}_N] \cdot d\mathbf{a}. \tag{20}$$

Мы только что установили, что $\int_S \mathbf{E}_n \cdot d\mathbf{v}$ равен $4\pi q_n$, если заряд $q_n$ расположен внутри поверхности $S$, и равен нулю снаружи. Таким образом, каждый заряд $q$ внутри поверхности вносит вклад, равный точно $4\pi q$, в поверхностный интеграл уравнения (20), а все внешние заряды не вносят ничего. Мы пришли к закону Гаусса:

> Поток электрического поля $\mathbf{E}$ через любую замкнутую поверхность, т. е. интеграл $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$ по поверхности, равен произведению $4\pi$ на полный заряд, охватываемый поверхностью:
> $$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = 4\pi \sum_i q_i = 4\pi \int \rho \, dv. \tag{21}$$

Мы называем это утверждение *законом*, так как оно эквивалентно закону Кулона и может с равным успехом считаться основным законом электростатического взаимодействия после определения заряда и поля. Законы Гаусса и Кулона не являются двумя независимыми физическими законами, а представляют собой один и тот же закон, выраженный в различных формах *). Возвращаясь к нашему доказательству, мы видим, что оно основано на обратной пропорциональности взаимодействий квадрату расстояния и, конечно, на аддитивности взаимодействий, т. е. на принципе суперпозиции. Таким образом, эта теорема применима к любому физическому полю, в котором действует закон обратных квадратов, например к гравитационному полю, что упоминалось в гл. 9 т. I.

---

*) Здесь имеется одно различие, несущественное в данном случае, но имеющее отношение к дальнейшему изучению полей движущихся зарядов. Закон Гаусса справедлив для более широкого класса полей, чем электростатические поля. В частности, закону Гаусса может удовлетворять сферическое несимметричное поле, величина которого обратно пропорциональна квадрату $r$. Другими словами, один закон Гаусса не является достаточным условием симметрии поля точечного источника, подразумеваемого в законе Кулона.

Легко доказать, что закон Гаусса несправедлив для поля, сила которого обратно пропорциональна, скажем, кубу расстояния. В этом случае поток электрического поля от точечного заряда $q$ через сферу радиуса $R$, в центре которой расположен заряд, равнялся бы

$$\Phi = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{q}{R^3} 4\pi R^2 = \frac{4\pi q}{R}. \tag{22}$$

Следовательно, увеличивая радиус сферы, мы можем сделать поток сколь угодно малым, в то время как полный заряд внутри сферы остается постоянным.

Эта замечательная теорема расширяет наши возможности в двух отношениях. Во-первых, она дает связь между полем и его источниками, в некотором смысле обратную той, что дает закон Кулона. Закон Кулона дает возможность определения электрического поля по заданным зарядам; по закону Гаусса мы можем определить величину заряда в любой области, в которой известна величина поля. Во-вторых, приведенное здесь математическое соотношение является мощным аналитическим инструментом; оно может, как мы увидим, облегчить решение сложных задач.

## 1.11. Поле сферического распределения заряда

Мы можем использовать закон Гаусса для определения электрического поля сферически симметричного распределения заряда, т. е. распределения, в котором плотность заряда $\rho$ зависит только от расстояния до центральной точки. На рис. 1.18 изображено поперечное сечение такого распределения. Плотность заряда в этом распределении неравномерна: в центре она больше, чем на некотором расстоянии от него, затем уменьшается, потом снова увеличивается и на расстоянии, большем $r_0$, равна нулю. Чему равна величина электрического поля в некоторой точке $P_1$, расположенной за пределами распределения, или в точке $P_2$ внутри него (рис. 1.19)? Если бы мы пользовались только законом Кулона, то мы должны были бы вы-

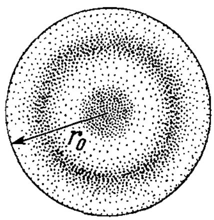


Рис. 1.18. Сферически симметричное распределение заряда.

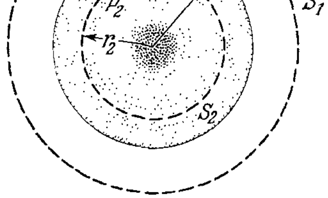


Рис. 1.19. Электрическое поле сферического распределения заряда.