Легко доказать, что закон Гаусса **несправедлив** для поля, сила которого обратно пропорциональна, скажем, кубу расстояния. В этом случае поток электрического поля от точечного заряда $q$ через сферу радиуса $R$, в центре которой расположен заряд, равнялся бы

$$\Phi = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{q}{R^3} 4\pi R^2 = \frac{4\pi q}{R}. \qquad (22)$$

Следовательно, увеличивая радиус сферы, мы можем сделать поток сколь угодно малым, в то время как полный заряд внутри сферы остается постоянным.

Эта замечательная теорема расширяет наши возможности в двух отношениях. Во-первых, она дает связь между полем и его источниками, в некотором смысле обратную той, что дает закон Кулона. Закон Кулона дает возможность определения электрического поля по заданным зарядам; по закону Гаусса мы можем определить величину заряда в любой области, в которой известна величина поля. Во-вторых, приведенное здесь математическое соотношение является мощным аналитическим инструментом; оно может, как мы увидим, облегчить решение сложных задач.

## 1.11. Поле сферического распределения заряда

Мы можем использовать закон Гаусса для определения электрического поля сферически симметричного распределения заряда, т. е. распределения, в котором плотность заряда $\rho$ зависит только от расстояния до центральной точки. На рис. 1.18 изображено поперечное сечение такого распределения. Плотность заряда в этом распределении неравномерна: в центре она больше, чем на некотором расстоянии от него, затем уменьшается, потом снова увеличивается и на расстоянии, большем $r_0$, равна нулю. Чему равна величина электрического поля в некоторой точке $P_1$, расположенной за пределами распределения, или в точке $P_2$ внутри него (рис. 1.19)? Если бы мы пользовались только законом Кулона, то мы должны были бы вы-

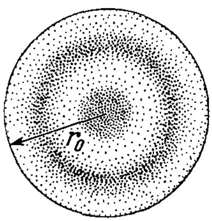


Рис. 1.18. Сферически симметричное распределение заряда.

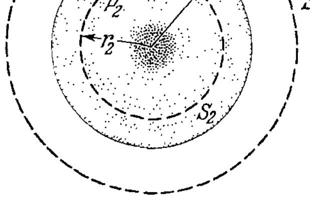


Рис. 1.19. Электрическое поле сферического распределения заряда.

полнить интегрирование, которое суммировало бы векторы электрического поля в точке $P_1$, создаваемые каждым элементарным объемом в распределении заряда. Рассмотрим другой подход, в котором используются и симметрия системы, и закон Гаусса.

Благодаря сферической симметрии электрическое поле в любой точке должно быть направлено по радиусу — другого направления быть не может. Величина поля $E$ должна также быть одинаковой во всех точках сферической поверхности $S_1$ радиуса $r_1$, так как все такие точки являются эквивалентными. Обозначим величину этого поля через $E_1$. Следовательно, поток через поверхность $S_1$ равен просто $4\pi r_1^2 E_1$ и, по закону Гаусса, должен быть равен произведению $4\pi$ на заряд, охватываемый поверхностью. Итак, $4\pi r_1^2 E_1 = 4\pi \times$ (заряд внутри $S_1$) или

$$E_1 = \frac{\text{заряд внутри } S_1}{r_1^2}. \tag{23}$$

Сравнивая эту величину с полем точечного заряда, мы видим, что *поле во всех точках поверхности $S_1$ является таким же, как если бы весь заряд внутри $S_1$ был сосредоточен в центре.* Аналогичное утверждение применимо к сфере, проведенной внутри распределения заряда. Поле в любой точке на поверхности $S_2$ является таким же, как если бы весь заряд внутри $S_2$ был расположен в центре, а вне $S_2$ заряда не было бы. Очевидно, что поле внутри «пологого» сферического распределения заряда равно нулю (рис. 1.20).

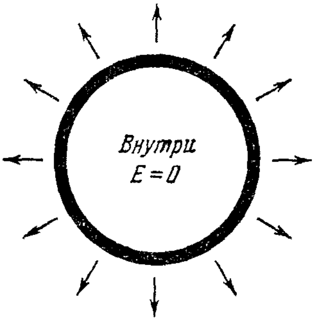


Рис. 1.20. Поле внутри заряженной сферической оболочки равно нулю.

Применяя то же доказательство к гравитационному полю, мы приходим к заключению, что Земля, если считать распределение ее массы сферически симметричным, притягивает внешние тела таким образом, как будто ее масса сосредоточена в центре. Это широко известное утверждение было доказано в т. I с помощью гравитационного потенциала и интегрирования. Тем, кто считает, что этот принцип выражает очевидное свойство центра масс, следует напомнить, что эта теорема не является, в общем, справедливой для других форм. Правильный куб с однородной плотностью не притягивает внешние тела так, как будто его масса сконцентрирована в его геометрическом центре.

Ньютон не считал эту теорему очевидной. Она служила ему основой для доказательства того, что на Луну при ее движении вокруг Земли и на тело, падающее на Землю, действуют одни и те же силы. Задержка публикации теории гравитации Ньютона примерно на двадцать лет объяснялась, во всяком случае частично, теми затруднениями, которые он испытывал, доказывая эту теорему. Доказательство, которое он, в конце концов, получил и опубликовал в «Principia» в 1686 г. (I книга, XII раздел, XXXI теорема), является чудом изобретательности, которым было осуществлено, грубо говоря, сложное объемное интегрирование без помощи известного нам теперь интегрального исчисления. Это доказательство было намного длиннее, чем вышеприведенное рассмотрение закона Гаусса, и более сложно обосновано. И все это потому, что, несмотря на математическую находчивость и оригинальность, присущие Ньютону, ему не хватало теоремы Гаусса — соотношения, которое теперь кажется таким очевидным и почти тривиальным.

## 1.12. Поле линейного заряда

Длинный прямой заряженный провод, если пренебречь его толщиной, можно характеризовать количеством электричества на единицу длины. Обозначим эту *линейную плотность заряда*, измеряемую в единицах СГСЭ$_q$ на сантиметр, буквой $\lambda$. Чему равно электрическое поле такого провода, предполагаемого бесконечно длинным и имеющего постоянную линейную плотность заряда $\lambda$? Мы решим эту задачу двумя способами. Первый из них использует закон Кулона.

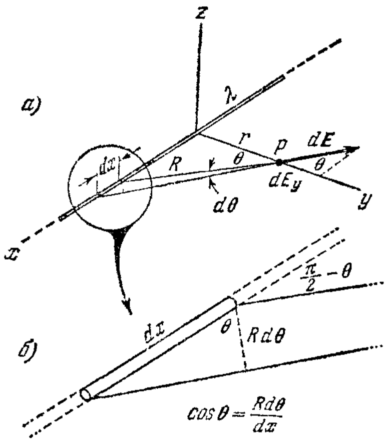


Рис. 1.21. *а*) Поле в точке $P$ является векторной суммой вкладов от каждого элемента линейного заряда. Рис. *б* представляет собой часть рис. *а*.

Для вычисления поля в точке $P$ (рис. 1.21) мы должны сложить вклады от всех элементов линейного заряда, один из которых изображен на рисунке в виде элемента длиной $dx$. Заряд $dq$ на таком элементе равен $dq=\lambda dx$. Ориентируя нашу ось $x$ вдоль провода, мы можем провести ось $y$ через точку $P$, расположенную на расстоянии $r$ *см* от ближайшей точки провода. Воспользуемся соображениями симметрии, из которых следует, что электрическое поле в точке $P$ должно быть направлено вдоль оси $y$. Поэтому обе компоненты поля $E_x$ и $E_y$ должны быть равны нулю. Вклад заряда $dq$ в $y$-компоненту электрического поля в точке $P$ равен

$$dE_y=\frac{dq}{R^2}\cos\theta=\frac{\lambda\,dx}{R^2}\cos\theta, \tag{24}$$

где $\theta$ — угол между вектором поля от заряда $dq$ и направлением оси $y$. Полная $y$-компонента поля вычисляется интегрированием

$$E_y=\int dE_y=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda\cos\theta}{R^2}dx. \tag{25}$$