в «Principia» в 1686 г. (I книга, XII раздел, XXXI теорема), является чудом изобретательности, которым было осуществлено, грубо говоря, сложное объемное интегрирование без помощи известного нам теперь интегрального исчисления. Это доказательство было намного длиннее, чем вышеприведенное рассмотрение закона Гаусса, и более сложно обосновано. И все это потому, что, несмотря на математическую находчивость и оригинальность, присущие Ньютону, ему не хватало теоремы Гаусса — соотношения, которое теперь кажется таким очевидным и почти тривиальным.

1.12. Поле линейного заряда

Длинный прямой заряженный провод, если пренебречь его толщиной, можно характеризовать количеством электричества на единицу длины. Обозначим эту *линейную плотность заряда*, измеряемую в единицах СГСЭ$_q$ на сантиметр, буквой λ. Чему равно электрическое поле такого провода, предполагаемого бесконечно длинным и имеющего постоянную линейную плотность заряда λ? Мы решим эту задачу двумя способами. Первый из них использует закон Кулона.

Для вычисления поля в точке P (рис. 1.21) мы должны сложить вклады от всех элементов линейного заряда, один из которых изображен на рисунке в виде элемента длиной dx. Заряд dq на таком элементе равен $dq = \lambda dx$. Ориентируя нашу ось x вдоль провода, мы можем провести ось y через точку P, расположенную на расстоянии r *см* от ближайшей точки провода. Воспользуемся соображениями симметрии, из которых следует, что электрическое поле в точке P должно быть направлено вдоль оси y. Поэтому обе компоненты поля E_x и E_y должны быть равны нулю. Вклад заряда dq в y-компоненту электрического поля в точке P равен

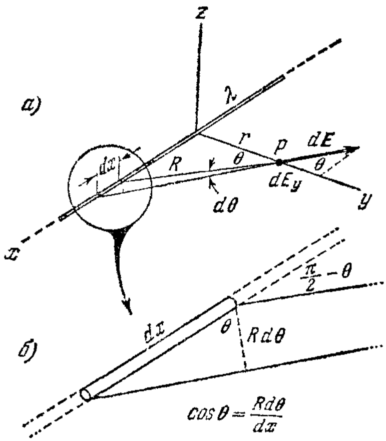

Рис. 1.21. *а*) Поле в точке P является векторной суммой вкладов от каждого элемента линейного заряда. Рис. *б* представляет собой часть рис. *а*.

$$dE_y = \frac{dq}{R^2}\cos\theta = \frac{\lambda\, dx}{R^2}\cos\theta, \tag{24}$$

где θ — угол между вектором поля от заряда dq и направлением оси y. Полная y-компонента поля вычисляется интегрированием

$$E_y = \int dE_y = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda \cos\theta}{R^2}\, dx. \tag{25}$$

Здесь удобно использовать в качестве переменной интегрирования угол θ. Поскольку $R=r/\cos\theta$ и $dx=R\,d\theta/\cos\theta$, интеграл равен

$$E_y=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\lambda\cos\theta\,d\theta}{r}=\frac{\lambda}{r}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta=\frac{2\lambda}{r}. \tag{26}$$

Мы видим, что поле бесконечно длинного провода с однородной плотностью заряда обратно пропорционально расстоянию от провода. Поле направлено от провода, если провод заряжен положительно, и к проводу, если заряд отрицательный.

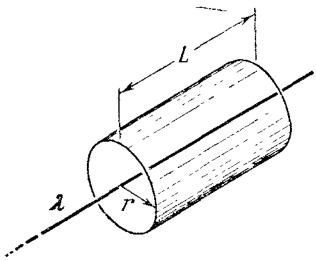

Рис. 1.22. Определение поля линейного заряда с помощью теоремы Гаусса.

Второй способ решения основан на законе Гаусса и приводит к такому же результату. Окружим элемент линейного заряда замкнутым круговым цилиндром длины L и радиуса r (рис. 1.22) и рассмотрим поток через эту поверхность.

Как мы уже отмечали, симметрия задачи гарантирует, что поле является радиальным, так что поток через торцы этой «консервной банки» равен нулю. Поток через цилиндрическую поверхность равен просто площади $2\pi rL$, умноженной на напряженность поля на поверхности (E_r). С другой стороны, заряд, окруженный поверхностью, равен λL, таким образом, закон Гаусса дает нам выражение $2\pi rLE_r=4\pi\lambda L$, или

$$E_r=\frac{2\lambda}{r}, \tag{27}$$

аналогичное формуле (26).

1.13. Поле бесконечно большого плоского заряженного слоя

Равномерно распределенный по тонкому слою электрический заряд называют поверхностным распределением заряда. Рассмотрим плоский слой, простирающийся в бесконечность с постоянной поверхностной плотностью заряда σ. Электрическое поле по обе стороны слоя, какова бы ни была его величина, должно быть направлено перпендикулярно к плоскости слоя; в системе не может быть другого выделенного направления. В точках P и P', расположенных на равных расстояниях по разным сторонам от слоя, векторы электрического поля благодаря симметрии должны иметь одинаковую величину, но противоположные направления.

Имея это в виду, мы сразу определим величину поля, пользуясь законом Гаусса. Начертим цилиндр (рис. 1.23) с поперечным сечением A, на одном из концов которого расположена точка P, а на другом P'. Наружный поток имеет место только на концах, так что если через E_P обозначить величину поля в точке P, а через $E_{P'}$ — величину поля в точке P', то наружный поток будет равен AE_P+