Здесь удобно использовать в качестве переменной интегрирования угол θ. Поскольку $R=r/\cos\theta$ и $dx=R\,d\theta/\cos\theta$, интеграл равен

$$E_y = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\lambda\cos\theta\,d\theta}{r} = \frac{\lambda}{r}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta = \frac{2\lambda}{r}. \qquad (26)$$

Мы видим, что поле бесконечно длинного провода с однородной плотностью заряда обратно пропорционально расстоянию от провода. Поле направлено от провода, если провод заряжен положительно, и к проводу, если заряд отрицательный.

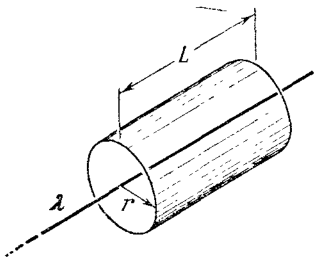


Рис. 1.22. Определение поля линейного заряда с помощью теоремы Гаусса.

Второй способ решения основан на законе Гаусса и приводит к такому же результату. Окружим элемент линейного заряда замкнутым круговым цилиндром длины L и радиуса r (рис. 1.22) и рассмотрим поток через эту поверхность.

Как мы уже отмечали, симметрия задачи гарантирует, что поле является радиальным, так что поток через торцы этой «консервной банки» равен нулю. Поток через цилиндрическую поверхность равен просто площади $2\pi rL$, умноженной на напряженность поля на поверхности (E_r). С другой стороны, заряд, окруженный поверхностью, равен λL, таким образом, закон Гаусса дает нам выражение $2\pi rLE_r=4\pi\lambda L$, или

$$E_r = \frac{2\lambda}{r}, \qquad (27)$$

аналогичное формуле (26).

1.13. Поле бесконечно большого плоского заряженного слоя

Равномерно распределенный по тонкому слою электрический заряд называют поверхностным распределением заряда. Рассмотрим плоский слой, простирающийся в бесконечность с постоянной поверхностной плотностью заряда σ. Электрическое поле по обе стороны слоя, какова бы ни была его величина, должно быть направлено перпендикулярно к плоскости слоя; в системе не может быть другого выделенного направления. В точках P и P', расположенных на равных расстояниях по разным сторонам от слоя, векторы электрического поля благодаря симметрии должны иметь одинаковую величину, но противоположные направления.

Имея это в виду, мы сразу определим величину поля, пользуясь законом Гаусса. Начертим цилиндр (рис. 1.23) с поперечным сечением A, на одном из концов которого расположена точка P, а на другом P'. Наружный поток имеет место только на концах, так что если через E_P обозначить величину поля в точке P, а через $E_{P'}$ — величину поля в точке P', то наружный поток будет равен AE_P+

$+AE_{P'}=2AE_P$. Заряд в цилиндре равен σA. Следовательно, $2AE_P=4\pi\sigma A$ или

$$E_P=2\pi\sigma. \qquad (28)$$

Мы видим, что величина поля не зависит от r, т. е. от расстояния до слоя. Уравнение (28) можно было бы вывести более сложным путем, вычисляя векторную сумму вкладов в поле в точке P от всех малых элементов заряда в слое.

Поле бесконечно длинного заряженного провода, как мы обнаружили, меняется обратно пропорционально расстоянию от провода, в то время как поле бесконечно большого слоя имеет одинаковую напряженность на всех расстояниях от слоя. Это — простые следствия того факта, что поле точечного заряда изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния. Если все вышесказанное еще не очевидно, то можно привести такое разъяснение: в грубом приближении частью линейного заряда, которая в основном ответственна за поле в точке P (см. рис. 1.21), является ближняя его часть, расположенная на расстоянии величины порядка r. Если все эти части сложить, а остаток отбросить, то мы получим концентрированный заряд величины $q\approx\lambda r$, который должен создать поле, пропорциональное q/r^2 или λ/r. В случае слоя количество электричества, которое является в этом смысле «эффективным», увеличивается пропорционально r^2 по мере удаления от слоя и компенсирует уменьшение поля, пропорционального $1/r^2$, для любого элемента заряда.

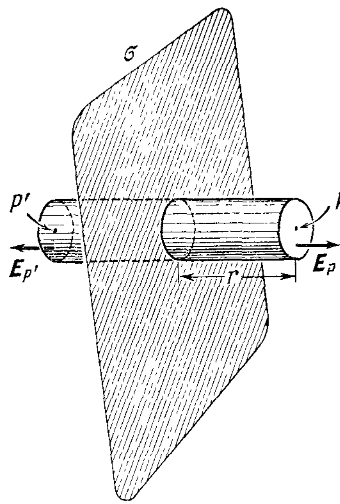


Рис. 1.23. Определение поля бесконечно большого заряженного слоя с помощью теоремы Гаусса.

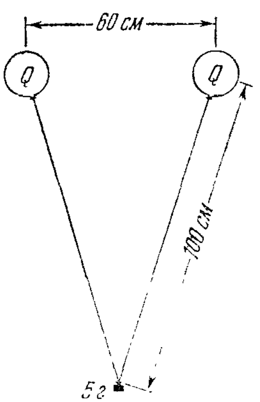
Задачи

1.1. *а) Фундаментальный вопрос: сравнение гравитационной и электрической сил, действующих между элементарными частицами.* Сравните электростатическое отталкивание двух электронов, расположенных на расстоянии r друг от друга, с гравитационным притяжением тех же частиц. Чему должна быть равна масса электрона, чтобы в точности уравновесить эти силы? (Такие фундаментальные постоянные, как заряд и масса электрона и гравитационная постоянная G, приведены в Приложении III.) Ответ. $F_e/F_g=4{,}15\cdot10^{12}$, $m=1{,}86\cdot10^{-6}$ *г.*

б) Единицы массы и заряда определены различными способами. В законе всемирного тяготения (т. I, гл. 3) G является постоянной, которую следует определить экспериментально, если грамм, единица массы, определен независимо. В системе электрических единиц СГСЭ для определения единицы заряда служит сам закон Кулона. Предполагая, что единица массы установлена точно таким же образом, найдите, чему будет равна ваша собственная масса в таких единицах?

1.2. Чему равна полная электростатическая сила, действующая на единицу положительного заряда, помещенного в центре квадрата со стороной b, если по углам квадрата расположены заряды q, $2q$, $-4q$ и $2q$? Ответ. $F = 10q/b^2$.

1.3. Два одинаковых, наполненных гелием шара, к которым привязан груз весом в 5 *г*, парят в равновесии, как показано на рисунке. Каждый шар несет заряд Q. Определите величину заряда в единицах СГСЭ$_q$. Ответ. 1660 ед. СГСЭ$_q$.



К задаче 1.3.

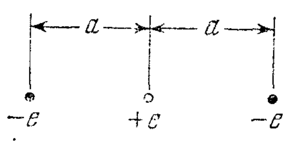
1.4. Заряды ($-e$) расположены по вершинам равностороннего треугольника со стороной r, а заряд $Q>0$ находится в центре тяжести треугольника. Чему должна быть равна величина Q, если сила, действующая на любой из отрицательных зарядов, равна нулю? Очевидно, что сила, действующая на заряд Q, вследствие симметрии всегда равна нулю. Является ли состояние равновесия системы устойчивым? Ответ. $Q = e/\sqrt{3}$.

1.5. *Потенциальная энергия системы точечных зарядов.* Три заряда расположены так, как указано на чертеже.

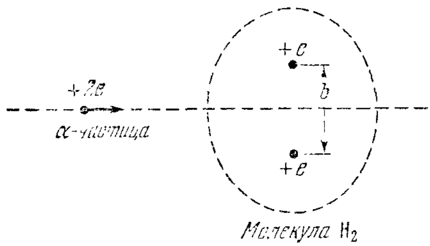
а) Вычислите электростатическую силу, действующую на каждый заряд.

б) Вычислите полную потенциальную энергию этой конфигурации зарядов.

1.6. α-частица проходит с большой скоростью через геометрический центр молекулы водорода, двигаясь по линии, перпендикулярной к оси, проведенной через оба протона. Расстояние между протонами равно b. На каком участке пути α-частица испытывает максимальную силу? Предположим, что протоны мало смещаются за время прохождения α-частицы. (Это предположение оправдано благодаря большой скорости движения α-частицы.) Можно также пренебречь электрическим полем электронов в молекуле. (Это приближение не является очень хорошим, так как в центральной части молекулы H_2 имеет место значительная концентрация отрицательного заряда.)



К задаче 1.5.



К задаче 1.6.

1.7. Найдите такое геометрическое расположение одного протона и двух электронов, чтобы потенциальная энергия этой системы была точно равна нулю. Сколько имеется таких положений для трех частиц на одной и той же прямой линии?

1.8. Вычислите потенциальную энергию, приходящуюся на один ион, для бесконечно протяженного одномерного ионного кристалла, т. е. ряда зарядов, расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга, величина которых равна e, а знаки чередуются. (Указание. При решении этой задачи может оказаться полезным разложение в ряд величины $\log(1+x)$.) Ответ. $U = -0{,}693\ e^2/a$.

1.9. *Потенциальная энергия распределения заряда.* Сфера радиусом a заполнена зарядом с однородной объемной плотностью ρ. Нужно определить потенциальную энергию U этой заряженной сферы, т. е. работу, затраченную на ее создание. Вычислите эту энергию, строя сферу по слоям и пользуясь тем положением, что поле вне сферического распределения заряда является таким же, как если бы весь заряд был сосредоточен в центре. Предположим, что сфера построена до радиуса r. Чему равен полный заряд q в этой стадии? Теперь прибавьте бесконечно малый слой толщиной dr; определите величину работы dU, которая затрачена на перенос заряда в этот слой из бесконечности до радиуса r и проинтегрируйте от $r=0$ до $r=a$. Выразите результат через полный заряд Q в сфере. Ответ. $U = {}^3/_5\ (Q^2/a)$.

1.10. *Модель электрона.* В начале нашего столетия существовала гипотеза чисто электростатического происхождения массы покоя электрона. Она стала особенно привлекательной после того, как специальная теория относительности доказала эквивалентность энергии и массы. Представьте себе электрон в виде шара радиусом r_0 с однородной объемной плотностью заряда. Пользуясь результатом задачи 1.9 и предположив, что потенциальная энергия этой системы равна mc^2, найдите радиус r_0. У этой модели имеется дефект: не предусмотрено ничего, что могло бы скрепить заряд! Ответ. $r_0={}^3/_5\ e^2/mc^2=1{,}69\cdot 10^{-13}$ *см*.

1.11. *Электростатическая потенциальная энергия ядра.* Электрическое строение ядра тяжелого атома приближенно можно изобразить в виде сферы из вещества с однородной объемной плотностью заряда, равной $4\cdot 10^{28}$ ед. СГСЭ$_q$/*см*^{3}. Чему равно изменение электростатической энергии, выраженной в эргах и в миллионах электрон-вольт, при расщеплении ядра урана с полным зарядом, равным $92e$, на два ядра с одинаковыми зарядами и радиусами, разведенными на большое расстояние друг от друга?

1.12. *Поле двух точечных зарядов.* Два точечных заряда расположены на оси x, один заряд, равный $+1$ ед. СГСЭ$_q$, в точке $x=+2$ *см*, а другой, равный -4 ед. СГСЭ$_q$, в точке $x=-2$ *см*.

а) Вычислите величину и направление электрического поля в точке (0, 3; 0) на оси y, определив сначала компоненты поля в этой точке. Ответ. $E = 0{,}288$ СГСЭ$_V$/*см*.

б) Найдите координаты точки с нулевым полем. Сколько имеется таких точек? Ответ. $x = 6,\ y = 0,\ z = 0$.

1.13. *Заряженное тело в поле.* Капелька воды диаметром 10^{-2} *см* несет такой отрицательный заряд, что электрическое поле на ее поверхности равно 20 ед. СГСЭ$_V$/*см*. Какова должна быть сила вертикального поля, чтобы удержать каплю от падения? Ответ. $E = 1{,}0$ СГСЭ$_V$/*см*.

1.14. *Электрическое поле в атмосфере.* Имеются данные о том, что электрическое поле над поверхностью земли не равно нулю даже в среднем. Предположим, что с помощью ряда измерений, проведенных на земном шаре в одно и то же время, установлено, что средняя величина направленного вверх поля равна 10^{-3} *дин*/ед. СГСЭ$_q$ и отрицательна. Чему равен при этом избыток заряда на поверхности земли, выраженный в добавочных электронах на квадратный сантиметр?

1.15. *Электрическое поле в атоме водорода.* Нейтральный атом водорода в нормальном состоянии ведет себя в некотором отношении как точечный заряд $+e$, окруженный облаком отрицательного заряда, плотность которого дается выражением $\rho\ (r)=Ce^{-2r/a_0}$. Здесь a_0 обозначает «боровский радиус», равный $0{,}53\cdot 10^{-8}$ *см*, а C — постоянная, величина которой выбирается такой, чтобы общий отрицательный заряд был в точности равен e. Чему равен полный электрический заряд внутри сферы радиусом a_0? Какова величина электрического поля на таком расстоянии от ядра? Ответ. $E = 1{,}15\cdot 10^7$ СГСЭ$_V$/*см*.

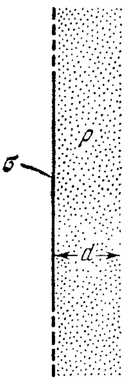
1.16. Тонкий непроводящий гибкий стержень согнут в форме почти правильной окружности радиусом 50 *см*. Между концами имеется промежуток 2 *см*. По длине стержня равномерно распределен положительный заряд, равный 1 ед. СГСЭ$_q$. Чему равны величина и направление электрического поля в центре круга? (Простая задача, если помнить принципы симметрии и суперпозиции.) Ответ. $E = 2{,}57\cdot 10^{-6}$ СГСЭ$_V$/*см*.

1.17. а) Точечный заряд q расположен в центре куба. Чему равна величина интеграла $\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}$ по одной грани куба? Ответ. $2\pi q/3$.

б) Заряд q смещен в один из углов куба. Чему теперь равна величина потока $\mathbf{E}$ через каждую из граней куба? Ответ. $\pi q/6$.

1.18. Два параллельных бесконечно больших слоя поверхностного заряда с плотностью $\sigma=6$ ед. $СГСЭ_q/см^2$ и $\sigma=-4$ ед. $СГСЭ_q/см^2$ расположены на расстоянии 2 *см* друг от друга. Рассмотрите электрическое поле этой системы. Теперь представьте, что эти две плоскости пересекаются под прямым углом. Покажите, как будет выглядеть поле в каждой из четырех областей, на которые разделено пространство.

1.19. На поверхности бесконечно большой плоскости имеется равномерное распределение заряда σ. Справа от плоскости и параллельно ей расположен бесконечно большой слой заряда толщиной d с однородной объемной плотностью заряда ρ. Все заряды неподвижны. Определите всюду **E**.



К задаче 1.19.

1.20. Одним из замечательных фактов, отраженных в законе Кулона, является следующий: одноименные заряды отталкиваются точно с такой же силой, с какой притягиваются разноименные заряды. Чтобы показать, что это утверждение не является тривиальным, и изучить некоторые из его применений, рассмотрим мир, отличающийся в этом отношении от нашего. В этом мире единичный заряд определяется силой, действующей между одноименными зарядами. Два равных положительных заряда, расположенных на расстоянии 1 *см* друг от друга, отталкиваются с силой 1 *дин*; это относится и к отрицательным зарядам. Закон обратных квадратов и принцип суперпозиции справедливы. Но единичный положительный и единичный отрицательный заряды притягиваются с силой в k *дин*, где $k>1$. Покажите, что в таком мире можно ожидать ситуации, при которой три концентрированных заряда будут притягивать друг друга. Возможно ли это в нашем мире? Необходимо ли в таком мире обобщение понятия количества заряда? Как обстоит дело с представлением об электрическом поле? Сколько различных измерений вы должны были бы провести, пользуясь пробными зарядами в точке пространства, чтобы предсказать силу, действующую на любое заряженное тело, помещенное каким-то образом в эту точку? Опишите для $k<1$ ситуацию, возможную в таком мире, но заметно отличную от всего, что могло бы произойти в нашем.

1.21. *Заряд распределен с цилиндрической симметрией.* Мы доказали, что поле сферически симметричного распределения заряда вне сферы является таким, как будто весь заряд сосредоточен в центре, а поле внутри полости равно нулю. Докажите аналогичную теорему для распределения заряда, имеющего цилиндрическую симметрию и бесконечную протяженность в направлении оси, например, для длинной заряженной трубки.

1.22. *Поле равномерно заряженной сферы.* Рассмотрите сферическое распределение заряда с однородной плотностью ρ_0 от $r=0$ до $r=a$ и $\rho_0=0$ при $r>a$. Определите электрическое поле для всех значений r как меньших, так и больших a. Имеется ли разрыв поля при прохождении поверхности при $r=a$? Имеется ли такой же разрыв при $r=0$?