каких расстояниях закон обратных квадратов становится недействительным. Имеются две области, в каждой из которых можно подозревать нарушение закона Кулона. Первой является область очень малых расстояний, меньших 10^{-14} *см*, где, как мы уже говорили, нет уверенности в возможности применения электромагнитной теории. Для очень больших расстояний, начиная с географических и до астрономических, мы также не имеем экспериментального подтверждения закона Кулона. Однако у нас нет определенной причины ожидать нарушения закона при больших расстояниях. Действительно, современная квантовая теория электромагнитного поля дает некоторое основание считать, что закон Кулона справедлив для расстояний, намного превышающих расстояния, применяемые в современных вариантах опыта Кэвендиша. Дело в том, что при нарушении закона Кулона на больших расстояниях квант света, или фотон, имел бы небольшую, но конечную массу покоя, что привело бы к некоторой зависимости в скорости электромагнитных волн в вакууме от длины волны. Непосредственные наблюдения *) показывают, что короткие радиоволны распространяются в вакууме с той же скоростью, что и видимый свет. Точность этого утверждения составляет по крайней мере одну часть на 10^6. На этом основании теория предсказывает, что закон Кулона должен быть справедливым до расстояний по крайней мере в несколько километров. Вероятно, можно привести и более строгие доказательства. Подводя итоги сказанному, мы имеем полное основание считать, что закон Кулона справедлив для огромного диапазона расстояний от 10^{-13} *см* до нескольких километров, если не больше. Мы принимаем этот закон за основу нашего описания электромагнетизма.

1.5. Энергия системы зарядов

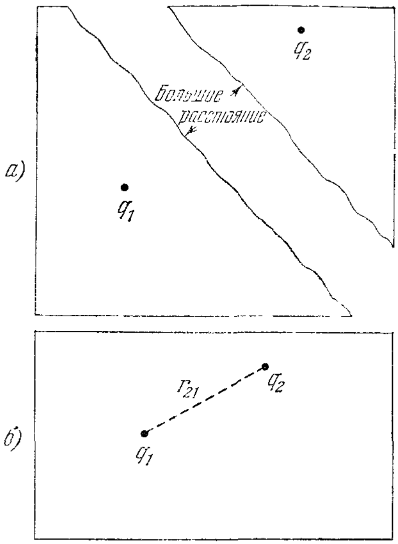
В принципе закон Кулона — это все, что есть в электростатике. Зная заряды и их координаты, мы можем определить все электрические силы. Если же заряды могут свободно перемещаться под действием сил другого типа, то закон Кулона позволяет найти состояние равновесия, при котором распределение зарядов останется постоянным. В этом же смысле законы движения Ньютона заключают в себе всю механику. Но и в механике, и в электромагнетизме мы получаем бóльшую возможность проникновения в сущность проблемы с помощью введения других понятий, наиболее важным из которых является энергия.

В электростатике понятие энергии имеет большое значение, так как электрические силы *консервативны*. Рассмотрим вначале работу, которая должна быть совершена над системой для того,

*) Лучшим доказательством этому утверждению было недавнее наблюдение практически одновременного (в большинстве случаев в пределах нескольких минут) прибытия на Землю радиоизлучений и излучений света от вспышки «яркой звезды», находящейся от нас на расстоянии 20 световых лет. (B. L o v e l l, F. L. W h i p p l e, L. H. S o l o m o n, Nature **202**, 377 (1964).)

чтобы определенным образом расположить некоторые заряженные тела. Начнем с двух заряженных тел или частиц, расположенных очень далеко друг от друга, как показано в верхней части рис. 1.4, и несущих заряды q_1 и q_2. Нас совершенно не интересует энергия, с помощью которой были первоначально получены эти концентрации зарядов. Будем медленно сближать частицы, пока расстояние между ними не станет равным r_{12}. Чему равна произведенная при этом работа?

Способ сближения зарядов никакой роли не играет: мы



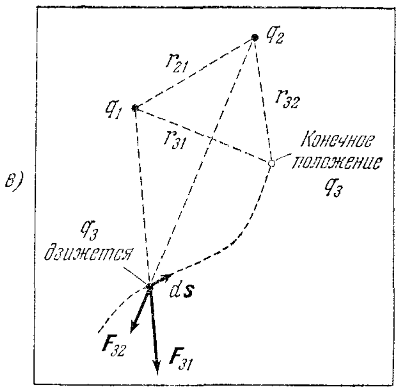


Рис. 1.4. Три заряда, расположенные близко друг к другу. Вначале вносится заряд q_2; затем при фиксированных q_1 и q_2 вносится заряд q_3.

можем перемещать заряд q_1 по прямой к q_2 или пользоваться любыми окольными путями. В любом случае затраченная работа равна интегралу от произведения силы на смещение в направлении силы. Сила, которую следует приложить для того, чтобы перенести один заряд по направлению к другому, равна и противоположна кулоновской силе

$$W = \int \text{сила} \times \text{расстояние} = \int\limits_{r=\infty}^{r_{12}} \frac{q_1 q_2 (-dr)}{r^2} = \frac{q_1 q_2}{r_{12}}. \qquad (3)$$

Поскольку r изменяется от ∞ до r_{12}, то приращение смещения равно $-dr$. Очевидно, что работа, произведенная над системой, будет положительной для одноименных зарядов, так как они отталкиваются друг от друга. Если q_1 и q_2 выражены в единицах СГСЭ$_q$ и r_{12} — в сантиметрах, уравнение (3) дает работу в эргах.

В т. I при изучении *консервативных сил* (см. т. I, гл. 5) мы установили, что эта работа всегда одинакова, независимо от траектории сближения. Применим это доказательство к двум зарядам q_1 и q_2

(рис. 1.5). Пусть заряд q_1 закреплен, а заряд q_2 может быть перемещен в одно и то же конечное положение по двум различным траекториям.

Сферическая оболочка, изображенная радиусами r и $r+dr$, пересекается обеими траекториями. Приращение работы $-\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ на этом отрезке пути одинаково для обеих траекторий. Это объясняется тем, что сила $\mathbf{F}$ одинакова по величине на всей сфере и направлена по радиусу от q_1, в то время как $ds=dr/\cos\theta$, следовательно, $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=F\,dr$. Любое приращение работы вдоль одной траектории сопровождается таким же приращением на другой, так что полные работы должны быть одинаковы. Наш вывод будет справедлив даже для столь извилистых траекторий, как траектория на рис. 1.5, обозначенная пунктиром. (Почему?)

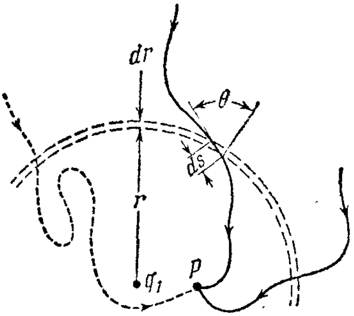


Рис. 1.5. Если сила является центральной, то на прохождение различных путей между сферами $r+dr$ и r требуется одинаковая работа.

Вернемся теперь к двум зарядам на рис. 1.4,б и внесем в систему из какого-нибудь удаленного места третий заряд q_3, поместив его в точку P_3, расстояние которой от заряда 1 равно r_{31} *см*, а от заряда 2—r_{32} *см*. Работа, затраченная на этот перенос, будет равна

$$W_3 = -\int_{\infty}^{P} \mathbf{F}_3\cdot d\mathbf{s}. \qquad (4)$$

Благодаря свойству аддитивности электрических взаимодействий, которое мы уже подчеркивали выше,

$$-\int \mathbf{F}_3\cdot d\mathbf{s} = -\int (\mathbf{F}_{31}+\mathbf{F}_{32})\cdot d\mathbf{s} = -\int \mathbf{F}_{31}\cdot d\mathbf{r} - \int \mathbf{F}_{32}\cdot d\mathbf{r}. \qquad (5)$$

Таким образом, работа по перенесению заряда q_3 в точку P_3 равна сумме двух работ, одна из которых необходима для переноса q_3 в точку P_3, если имеется только один заряд q_1, а другая требуется для переноса q_3 в точку P_3 при наличии только одного заряда q_2,

$$W_3 = \frac{q_1q_3}{r_{31}} + \frac{q_2q_3}{r_{32}}. \qquad (6)$$

Следовательно, полная работа, затраченная на образование указанного расположения трех зарядов, которую мы обозначим через U, равна

$$U = \frac{q_1q_2}{r_{12}} + \frac{q_1q_3}{r_{13}} + \frac{q_2q_3}{r_{23}}. \qquad (7)$$

Отметим, что величины q_1, q_2 и q_3 входят в уравнение (7) симметрично, несмотря на то, что заряд q_3 был внесен в систему последним.

Мы получили бы тот же результат, если бы внесли заряд q_3 первым. (Попробуйте это проделать.)

Таким образом, работа U не зависит от последовательности, в которой собираются заряды. Ее можно назвать *электрической потенциальной энергией* рассмотренной системы зарядов. Как всегда в определении потенциальной энергии, здесь существует некоторый произвол. В данном случае нулевое значение потенциальной энергии соответствует ситуации, когда все три заряда уже существуют, но находятся на бесконечно больших расстояниях друг от друга. Потенциальная энергия относится к конфигурации в целом. Приписывать определенную ее часть одному из зарядов не имеет смысла.

Очевидно, что этот простой результат можно обобщить на любое количество зарядов. Если мы имеем N различных зарядов, любым образом расположенных в пространстве, то потенциальная энергия системы вычисляется суммированием по всем парам, как показано в уравнении (7). Нулевое значение потенциальной энергии, как и в первом случае, соответствует удалению всех зарядов на большие расстояния друг от друга.

В качестве примера вычислим потенциальную энергию для восьми отрицательных зарядов, расположенных по углам куба со стороной b, и положительного заряда в центре куба, как это показано на рис. 1.6, *а*. Предположим, что каждый отрицательный заряд

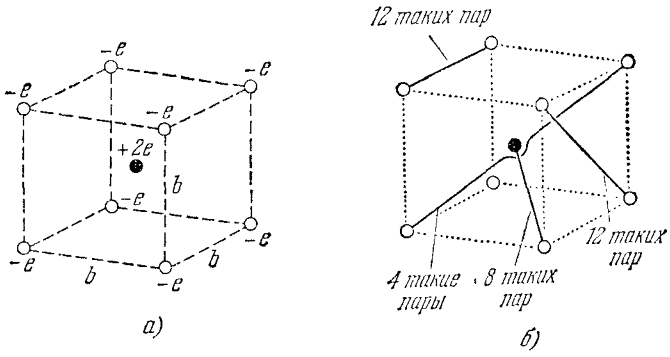


Рис. 1.6. *а*) Потенциальная энергия для такого расположения девяти точечных зарядов выражается формулой (8). *б*) В сумму входят четыре типа пар.

является электроном с зарядом $-e$, в то время как частица в центре несет двойной положительный заряд $2e$. Суммируя по всем парам, получим

$$U=\frac{8\,(-2e^2)}{(\sqrt{3}/2)\,b}+\frac{12e^2}{b}+\frac{12e^2}{\sqrt{2}\,b}+\frac{4e^2}{\sqrt{3}\,b}=\frac{4{,}32e^2}{b}. \tag{8}$$

На рис. 1.6, *б* показано, откуда берется каждый член этой суммы. Энергия положительна; это значит, что на создание системы была затрачена работа, которая может быть, конечно, получена обратно, если мы предоставим зарядам возможность разойтись, воздействуя при этом на некоторое внешнее тело (или тела).

Если бы электроны могли просто уйти на бесконечность из этой конфигурации, то *полная кинетическая энергия* всех частиц была бы равна U. Это справедливо и в том случае, если они будут удалены одновременно и симметрично, и в том случае, когда их будут освобождать по одному в любом порядке. Мы чувствуем здесь значение простого понятия полной потенциальной энергии системы. Подумайте, какую задачу пришлось бы выполнить, если бы мы должны были вычислить результирующий вектор силы, действующей на каждую частицу, в каждой стадии создания конфигурации! В нашем примере геометрическая симметрия, конечно, облегчила бы задачу; но даже при этом задача была бы гораздо сложнее, чем простое вычисление, приведенное выше.

Один из способов написания суммы по парам таков:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k\neq j}\frac{q_j q_k}{r_{jk}}. \tag{9}$$

Знак двойной суммы означает следующее: возьмите $j=1$ и суммируйте по $k=2, 3, 4, \ldots, N$; затем возьмите $j=2$ и суммируйте по $k=1, 3, 4, \ldots, N$; и т. д. до $j=N$. Ясно, что при этом каждая пара войдет в сумму дважды, поэтому перед знаком суммы стоит множитель $^1/_2$.

1.6. Электрическая энергия кристаллической решетки

Эти идеи имеют широкое применение в физике кристаллов. Мы знаем, что ионный кристалл, например кристалл хлористого натрия, может быть описан с очень хорошим приближением, как расположение положительных ионов (Na^+) и отрицательных ионов (Cl^-), чередующихся в правильной трехмерной последовательности, или решетке. Расположение ионов в кристалле хлористого натрия показано на рис. 1.7, *а*. Конечно, ионы не точечные заряды, но они представляют собой почти сферические распределения зарядов и, следовательно (как мы вскоре докажем), электрические силы, с которыми они действуют друг на друга, будут такими же, как если бы каждый ион был заменен эквивалентным точечным зарядом, расположенным в его центре. На рис. 1.7, *б* показана такая электрически эквивалентная система. Электростатическая потенциальная энергия решетки зарядов играет важную роль в объяснении стабильности и сил сцепления ионного кристалла. Посмотрим, сможем ли мы вычислить величину этой энергии. Нам придется, по-видимому, иметь дело с суммой огромного числа членов, почти с двойной бесконечностью, так как даже малый макроскопический кристалл содержит около 10^{20} атомов. Будет ли эта сумма сходиться? Итак, мы хотим определить потенциальную энергию, приходящуюся на единицу объема или на единицу массы кристалла. Можно надеяться, что она не зависит от размеров кристалла, так как один конец макроскопического кристалла будет оказывать весьма небольшое влияние на