На рис. 1.7, *б* в центре находится положительный ион, и наша сумма охватывает всех соседей, ближних и далеких. Выражение (10) принимает следующий вид:

$$U = \frac{1}{2} N \left[-\frac{6e^2}{a} + \frac{12e^2}{\sqrt{2}\,a} - \frac{8e^2}{\sqrt{3}\,a} + \ldots \right]. \tag{11}$$

Первый член появляется от шести ближайших ионов хлора, расположенных на расстоянии a, второй — от двенадцати ионов натрия, расположенных по углам куба, и т. д. Очевидно, этот ряд не сходится *абсолютно*; если бы мы сделали глупость и попробовали вначале просуммировать все положительные члены, то такая сумма оказалась бы расходящейся. Для вычисления написанной суммы мы должны распространить ее на еще более удаленные ионы, причем включать их группами, представляющими собой почти нейтральные ячейки вещества. Затем эту сумму можно оборвать, так как удаленные ионы образуют равномерную смесь положительных и отрицательных зарядов, и мы можем быть уверенными в малости их вкладов. Это — грубый способ описания тонкой вычислительной задачи. Численная оценка такого ряда производится в настоящее время на электронно-вычислительной машине. Для нашего случая ответ равен

$$U = -\frac{0{,}8738 N e^2}{a}, \tag{12}$$

где N — число ионов, вдвое большее, чем число молекул.

Отрицательный знак отражает доминирующую роль ближайших соседей и показывает, что на разделение кристалла на ионы должна быть затрачена работа. Другими словами, электрическая энергия помогает объяснить сцепление кристалла. Однако, если бы дело было только в ней, то кристалл распался бы, так как потенциальная энергия распределения заряда, очевидно, уменьшается при сокращении всех расстояний a. Здесь мы снова встречаемся с известной проблемой классической, т. е. неквантовой, физики. Согласно законам классической физики, ни одна система, на которую действуют только электрические силы, не может находиться в состоянии устойчивого равновесия. Делает ли это утверждение наш анализ бесполезным? Отнюдь нет. Замечательно, что и в квантовой физике кристаллов понятие об электрической потенциальной энергии сохраняет свой смысл, и эта энергия может быть вычислена указанным выше способом.

1.7. Электрическое поле

Предположим, что мы имеем некоторое расположение зарядов $q_1, q_2, \ldots, q_N$, фиксированное в пространстве, и что нас интересуют не силы, с которыми эти заряды действуют друг на друга, а только их действие на какой-то другой заряд q_0, помещенный в окрестности этих зарядов. Нам известен способ вычисления результирующей силы, действующей на заряд q_0, если даны его координаты x, y, z. Эта сила равна

$$\mathbf{F}_0 = \sum_{j=1}^{N} \frac{q_0 q_j \hat{\mathbf{r}}_{0j}}{r_{0j}^2}. \tag{13}$$

Здесь r_{0j} — расстояние от j-го заряда системы до точки (x, y, z). Сила пропорциональна q_0, так что если мы исключим q_0, то получим векторную величину, которая зависит только от структуры нашей первоначальной системы зарядов $q_1, q_2, \ldots, q_N$ и от положения точки (x, y, z). Назовем эту векторную функцию от x, y, z *электрическим полем*, создаваемым зарядами $q_1, q_2, \ldots, q_N$, и обозначим ее через $\mathbf{E}$. Заряды $q_1, \ldots, q_N$ называются *источниками* поля. Определением электрического поля $\mathbf{E}$, созданного распределением заряда в точке (x, y, z), может служить выражение

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j \hat{\mathbf{r}}_{0j}}{r_{0j}^2}. \tag{14}$$

На рис. 1.8 показано сложение векторов поля от точечного заряда, равного +2 ед. СГСЭ$_q$, и поля от точечного заряда — 1 ед. СГСЭ$_q$ в определенной точке пространства. В системе единиц СГСЭ$_q$ величина электрического поля выражается в динах на единицу заряда, т. е. в *дин*/ед. СГСЭ$_q$.

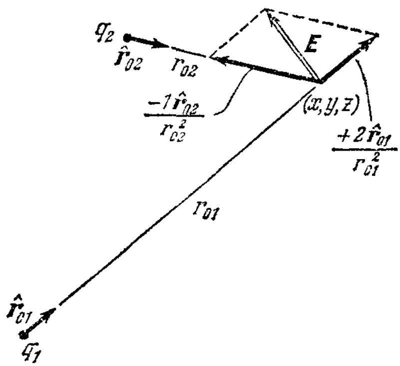

Рис. 1.8. Поле в точке (x, y, z) является векторной суммой полей каждого из зарядов системы.

До сих пор мы не узнали ничего нового. Электрическое поле представляет собой только другой способ описания системы зарядов; это описание заключается в указании величины и направления силы, приходящейся на единицу пробного заряда q_0, который можно поместить в любой точке. При этом следует проявлять осторожность. Если заряды неподвижны, то введение некоторого конечного заряда q_0 может заставить их изменить свое положение, и тогда само поле, определенное уравнением (14), изменится. Поэтому мы начинаем наше обсуждение с неподвижных зарядов. Иногда, вводя поле $\mathbf{E}$, требуют, чтобы заряд q_0 был «бесконечно малым» пробным зарядом, тогда поле $\mathbf{E}$ определяют как предел отношения $\mathbf{F}/q_0$ при $q_0 \to 0$. Однако преимущество такого определения лишь кажущееся. Напомним, что в реальном мире мы никогда не встречаем заряда меньше e! Действительно, если мы примем уравнение (14) з а о п р е д е л е н и е $\mathbf{E}$ без ссылки на пробный заряд, то не возникает никаких проблем и источники не должны быть неподвижными. Если введение нового заряда вызывает сдвиг в источнике зарядов, тогда действительно произойдет изменение электрического поля, и если мы хотим предсказать силу, действующую на новый заряд, то должны использовать для ее вычисления новое электрическое поле. Возможно, вы спросите, что такое электрическое поле? Является оно чем-нибудь реальным или только названием коэффициента, который следует умножить на заряд для получения численного значения силы, наблюдаемой в эксперименте? Здесь уместны два замечания. Во-первых, чем бы мы не считали поле, важнее всего то, что это понятие имеет смысл. Во-вторых, факт существования вектора электрического поля в любой точке пространства, дающего возможность предсказать силу, которая будет действовать на *любой* заряд в этой точке, без сомнения, не является тривиальным. Это могло бы быть иначе! Если бы не соответствующие эксперименты, мы могли бы вообразить например, что в двух различных точках пространства, в которых единичные заряды испытывают одинаковую силу, пробные заряды удвоенной величины испытывали бы различные силы, зависящие от природы других зарядов системы. Если бы это было верно, то описание сил с помощью поля не соответствовало бы действительности.

Электрическое поле сообщает пространству *локальное свойство*, имеющее следующий смысл: если нам известно значение **E** в некоторой малой области, то мы знаем без дальнейших исследований, что́ случится с любыми зарядами в этой области. Для этого не надо знать, как создано поле. Если нам известно электрическое поле во всех точках пространства, то мы имеем полное описание всей системы, которое позволяет обнаружить положения и величины всех зарядов.

Чтобы представить себе электрическое поле, вы должны связать с каждой точкой пространства вектор. В этой книге мы будем пользоваться различными способами представления векторных полей, но ни один из них не является полностью удовлетворительным.

Векторную функцию, заданную в трехмерном пространстве, трудно представить в пространстве двух измерений. Мы можем изобразить величину и направление **E** в различных точках, нанеся на рисунок небольшие стрелки вблизи этих точек и делая стрелки длиннее там, где поле **E** больше *). Пользуясь таким способом, мы изобразили на рис. 1.9, *а* поле изолированного точечного заряда, равного $+3$ произвольным единицам, и на рис. 1.9, *б* поле точечного заряда в -1 единицу. Эти изображения ничего не прибавляют к нашему пониманию поля изолированного заряда; каждый может представить простое радиальное поле силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния, и без помощи таких изображений. Мы делаем это, чтобы

*) Такое представление довольно нелепо. Трудно указать такую точку в пространстве, которой соответствует данная величина вектора; кроме того, диапазон величин E часто настолько велик, что выбор длин стрелок, пропорциональных E, обычно неосуществим.

иметь возможность объединить оба поля на рис. 1.10, на котором таким методом представлено поле двух разных зарядов, разведенных на расстояние a. На рис. 1.10 изображено только поле в плоскости, содержащей заряды. Для получения полного трехмерного представления следует вообразить, что рисунок вращается вокруг оси

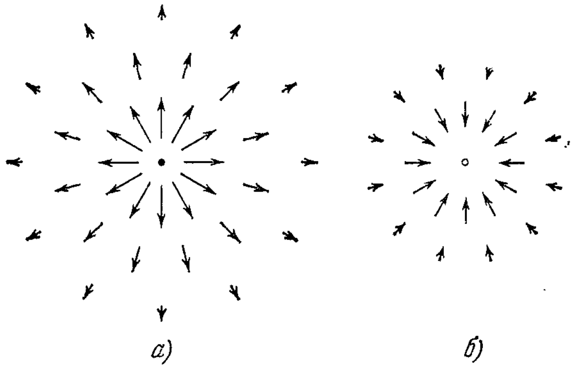

Рис. 1.9. *а*) Поле заряда $q_1=+3$. *б*) Поле заряда $q_2=-1$. Оба рисунка весьма приблизительны и имеют только иллюстративное значение.

симметрии. На рис. 1.10 существует одна точка пространства, в которой поле $\mathbf{E}$ равно нулю. На каком расстоянии от ближайшего заряда она расположена? Заметьте также, что на краях рисунка поле

Рис. 1.10. Поле в окрестности двух зарядов, $q_1=+3$, $q_2=-1$, является суперпозицией полей, показанных на рис. 1.9, *а* и *б*.

направлено в основном наружу и поэтому на большом расстоянии от зарядов оно похоже на поле положительного точечного заряда. Этого следовало ожидать, потому что разведение зарядов не может иметь большого значения для точек, расположенных на больших расстояниях, и если два наших источника соединить в одном месте, то останется точечный заряд, равный $+2$ единицам.

Другим способом представления векторного поля является изображение *силовых линий поля*. Последние представляют собой просто кривые, касательные к которым в любой точке совпадают с направлением поля в этой точке. Такие кривые являются гладкими и непрерывными, за исключением таких особенностей, как точечные заряды, или таких точек, как та точка в примере рис. 1.10, где поле равно нулю. По силовым линиям нельзя непосредственно определить величину поля, несмотря на то, что обычно, как мы увидим, силовые линии сходятся по мере приближения к области сильного поля и расходятся в области слабого поля. На рис. 1.11 нанесено несколько силовых линий для такого же расположения зарядов, как на рис. 1.10, а именно для положительного заряда в 3 единицы и отрицательного заряда, равного 1 единице.

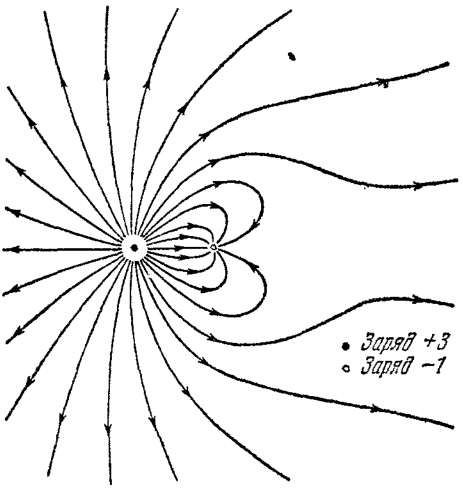

Рис. 1.11. Несколько силовых линий электрического поля вблизи двух зарядов, $q_1=+3$, $q_2=-1$.

В данном случае мы снова можем дать только картину на плоскости.

1.8. Распределение заряда

Перейдем теперь от точечных зарядов к их непрерывным распределениям. Объемное распределение заряда описывается скалярной функцией, плотностью заряда ρ, которая имеет размерность [заряд/объем] и зависит от положения точки в пространстве. Таким образом, плотность ρ, умноженная на элемент объема, дает величину заряда, содержащегося в этом элементе объема. Если записать ρ как функцию координат x, y, z, то произведение $\rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ будет представлять собой заряд, содержащийся в небольшом ящике с объемом $dx\,dy\,dz$, расположенном в точке (x, y, z). В атомном масштабе плотность заряда, конечно, колоссально изменяется от точки к точке; несмотря на это, она оказывается полезным понятием и в этой области. Однако мы будем пользоваться ею главным образом при исследовании макроскопических систем, настолько больших, что наш элемент объема $dv=dx\,dy\,dz$, будучи чрезвычайно малым по сравнению с размерами системы, окажется достаточно большим, что-