1.9. Поток

Связь между электрическим полем и его источниками может быть выражена замечательно простым способом, который будет иметь много применений. Начнем с определения величины, называемой *потоком*.

Рассмотрим в пространстве некоторое электрическое поле и замкнутую поверхность произвольной формы. На рис. 1.13 изображены такая поверхность и поле в виде нескольких силовых линий. Разделим всю поверхность на столь малые части, что поверхность каждой

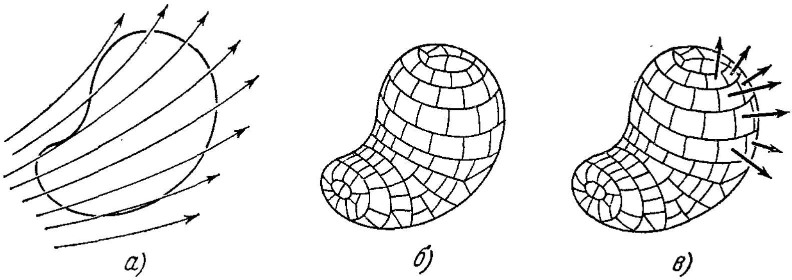

Рис. 1.13. Замкнутая поверхность в векторном поле (*а*) разделена на элементы малой площади (*б*). Каждый элемент поверхности представлен вектором, направленным наружу (*в*).

части (назовем ее элементом поверхности) можно считать практически плоской; на такой поверхности вектор поля не будет заметно меняться. Другими словами, поверхность не должна быть слишком морщинистой и не должна проходить непосредственно через особенность поля *), например через точечный заряд. Элемент поверхности имеет определенную величину, выражающуюся в квадратных сантиметрах, кроме того, он определяет единственное направление — направление наружной нормали. (Поскольку поверхность является замкнутой, ее внутреннюю часть можно отличить от наружной; здесь нет неоднозначности.) Представим величину и направление элемента поверхности вектором. Тогда для каждого из элементов, на которые разделена поверхность, как, например, для элемента под номером j, мы будем иметь вектор $\mathbf{a}_j$, определяющий его величину и направление. Шаги, предпринятые нами, отображены на рис. 1.13,*б* и *в*. Обратите внимание на то, что векторы $\mathbf{a}_j$ совсем не зависят от формы элемента поверхности; способ разделения поверхности не имеет значения, пока элементы достаточно малы.

Обозначим через $\mathbf{E}_j$ вектор электрического поля на элементе поверхности j. Скалярное произведение $\mathbf{E}_j \cdot \mathbf{a}_j$ является числом. Мы

*) Под особенностью поля мы обычно понимаем не только точечный источник, где поле приближается к бесконечности, но любое место, где величина или направление поля претерпевают разрыв, как, например, бесконечно тонкий слой концентрированного заряда. Этот последний, более слабый вид особенности не вызывает трудности, пока некоторая конечная поверхность нашего объема не совпадает с поверхностью разрыва.

называем это число *потоком* через данный элемент поверхности. Чтобы понять происхождение этого названия, выберем векторную функцию, представляющую собой скорость движения жидкости, например в реке, где скорость меняется от одного места к другому, но является постоянной во времени в любой точке. Обозначим это векторное поле, измеряемое, скажем, в *см/сек*, через **v**. Тогда если **a** обозначает (в *см*^{2}) элемент площади, погруженной в воду, то произведение $\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}$ является *потоком* воды через элемент площади в *см*^{3}*/сек* (рис. 1.14). Необходимо подчеркнуть, что наше определение потока применимо к любой векторной функции, какую бы физическую постоянную она ни представляла.

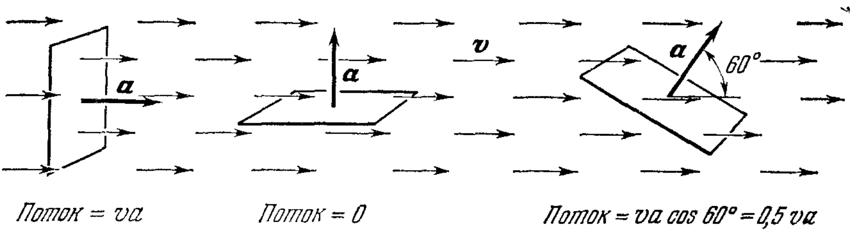

Рис. 1.14. Поток через рамку площадью **a** равен $\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}$. Если **v** — скорость жидкости, то поток равен объему жидкости, проходящей через рамку в единицу времени.

Теперь сложим потоки через все элементы поверхности. Мы получим скалярную величину Ф, которая является потоком через всю поверхность:

$$\Phi = \sum_{\text{по всем } j} \mathbf{E}_j \cdot \mathbf{a}_j. \tag{16}$$

Беспредельно уменьшая участки и увеличивая их число, перейдем от суммы (16) к поверхностному интегралу:

$$\Phi = \int_{\substack{\text{по всей} \\ \text{поверхности}}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a}. \tag{17}$$

Поверхностный интеграл от любой векторной функции **F** по поверхности S означает следующее: разделим S на небольшие элементы, каждый из которых представлен вектором, направленным наружу, величина которого равна площади элемента; на каждом элементе возьмем скалярное произведение вектора площади элемента и локального значения вектора **F** и просуммируем все эти произведения; пределом этой суммы, по мере уменьшения элементов, будет поверхностный интеграл. Пусть вас не пугает перспектива таких вычислений для различных поверхностей сложной формы, как, например, на рис. 1.13. Удивительное свойство, которое мы собираемся продемонстрировать, делает такие вычисления ненужными!