ГЛАВА 2

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ

2.1. Линейный интеграл электрического поля

Рассмотрим поле **E** некоторого стационарного распределения электрических зарядов. Обозначим через P_1 и P_2 две произвольные точки поля. Линейный интеграл от **E** между двумя заданными точками, взятый по некоторому пути, соединяющему точки P_1 и P_2, равен $\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$ (рис. 2.1). Это означает следующее: делим путь на короткие сегменты, причем каждый сегмент представлен вектором, соединяющим его концы; берем скалярное произведение вектора сегмента на поле **E** в этом месте пути; находим сумму этих произведений для всего пути. Интеграл, как всегда, является пределом этой суммы при уменьшении длины сегментов и беспредельном увеличении их числа.

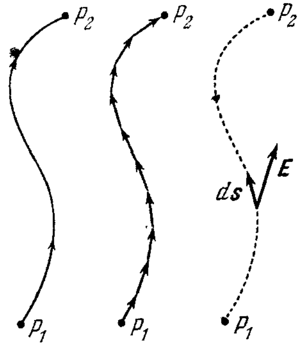

Рис. 2.1. Показано деление пути на элементы $d\mathbf{s}$.

Рассмотрим конкретный пример. Предположим, что мы имеем электрическое поле **E** с компонентами $E_x = Ky$ и $E_y = Kx$, где K — величина постоянная. Это — одна из возможных форм электростатического поля. (Мы вскоре узнаем, как это можно быстро доказать.) На рис. 2.2, *а* изображено несколько силовых линий нашего поля. Чему равна величина интеграла от **E** между точками A и C, взятого по определенному пути ABC (см. рис. 2.2)? Вектор, представляющий элемент пути, равен

$$d\mathbf{s} = \hat{\mathbf{x}}\,dx + \hat{\mathbf{y}}\,dy, \quad (1)$$

и так как вектор **E** в данном примере равен

$$\mathbf{E} = K(\hat{\mathbf{x}}y + \hat{\mathbf{y}}x), \quad (2)$$

то скалярное произведение $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$ для любого элемента пути имеет вид

$$\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}=K\,(y\,dx+x\,dy). \tag{3}$$

Вдоль отрезка пути от A до B $y=2x$ и $dy=2dx$. Следовательно,

$$\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}=K\int_A^B (y\,dx+x\,dy)=K\int_0^1 (2x\,dx+2x\,dx)=4K\int_0^1 x\,dx=2K. \tag{4}$$

Вдоль пути от B до C $y=2$ и $dy=0$

$$\int_B^C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}=K\int_B^C (y\,dx+x\,dy)=K\int_1^2 2dx=2K. \tag{5}$$

Линейный интеграл по пути ABC равен, следовательно, $2K+2K$, или $4K$.

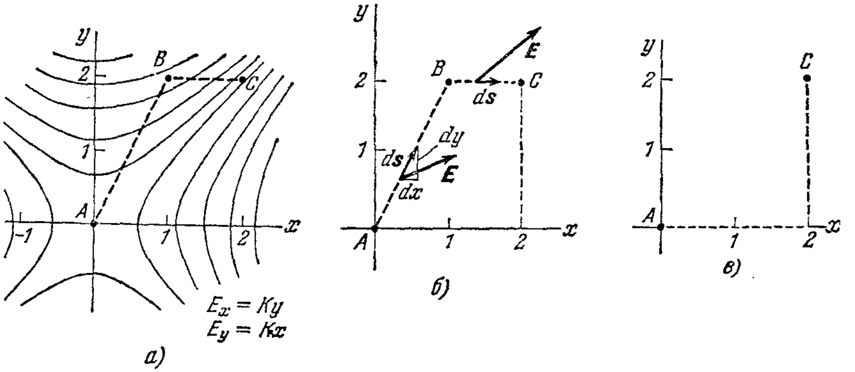

Рис. 2.2. *а*) Определенный путь ABC, в электрическом поле $E_x=Ky$, $E_y=Kx$. Показано несколько силовых линий. *б*) Вычисление линейного интеграла $\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$ по этому пути (см. уравнение (3)—(5)). *в*) Другой вид пути между теми же точками.

Электрическое поле точечного заряда направлено радиально, и его величина зависит только от радиуса r. Если P_1 и P_2 являются любыми двумя точками в поле точечного заряда, то довольно очевидно, что линейный интеграл от $\mathbf{E}$ одинаков для всех видов пути, соединяющих эти точки. Это непосредственно следует из доказательства, приведенного в разделе 1.5 (см. также рис. 1.5), для получения работы, затраченной на перемещение заряда в поле центральной силы.

Действительно, единственным различием между линейным интегралом от силы $\mathbf{F}$, действующей на пробный заряд q, и линейным интегралом от $\mathbf{E}$, т. е. от поля, в котором движется пробный заряд, является множитель q. Любое электростатическое поле представляет собой просто суперпозицию полей определенных зарядов, как показано выражениями (1.14) и (1.15). В любом таком поле, следовательно, линейный интеграл от поля **E**, т. е. полного поля, созданного всеми источниками, не должен зависеть от пути:

$$\boxed{\begin{gathered}\int\limits_{P_1}^{P_2} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} \text{ имеет одинаковую величину для любого} \\ \text{пути, соединяющего точки } P_1 \text{ и } P_2 \\ \text{в электростатическом поле.}\end{gathered}} \tag{6}$$

В качестве примера рассмотрим линейный интеграл от A до C на рис. 2.2, *в* по пути через точку (2,0) в рассмотренном выше поле **E**.

На первом отрезке пути вдоль оси x, между началом координат и $x=2$, поле перпендикулярно к пути, следовательно, произведение $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$ равно нулю. На втором отрезке пути $E_y=Kx=2K$ и длина этого отрезка составляет 2 единицы. Таким образом, величина линейного интеграла равна $4K$, что совпадает со значением, полученным выше. Если нам известно, что линейный интеграл не должен зависеть от пути, было бы неразумно вычислять его для такого пути, как ABC. На практике не часто требуется вычислять величины линейных интегралов. Главная цель примера дать ясное представление о том, что означает линейный интеграл.

2.2. Разность потенциалов и потенциальная функция

Поскольку линейный интеграл в электростатическом поле не зависит от пути, мы можем использовать его для определения скалярной величины φ_{21}:

$$\boxed{\varphi_{21} = -\int\limits_{P_1}^{P_2} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}.} \tag{7}$$

Величина φ_{21} имеет смысл *работы*, затраченной на перенос *единицы положительного заряда* в поле **E** из точки P_1 в P_2. Таким образом, φ_{21} представляет собой однозначно определенную скалярную функцию двух точек P_1 и P_2, называемую электрической *разностью потенциалов* между двумя точками.

В системе единиц СГС разность потенциалов измеряется в *эрг*/ед. СГСЭ$_q$. Эта единица имеет свое собственное название, *стат-вольт* («стат» происходит от слова «электростатический»), и обозначается «единица СГСЭ$_V$». *Вольт* — это единица разности потенциалов в системе МКС*). Он эквивалентен 1/299,79, т. е. приблизительно

*) Вольт, так же как кулон, ампер и ом, применялся в качестве «практической» единицы задолго до того, как была построена полная система электрических единиц МКС.