причем ее величина в любой определенной точке пространства (x, y, z) является пределом отношения в уравнении (49), так как элементарный объем V_i становится меньше и меньше, все время охватывая точку (x, y, z). Итак, $\operatorname{div}\mathbf{F}$ является просто скалярной функцией координат.

2.10. Теорема Гаусса и дифференциальная форма закона Гаусса

Если значение скалярной функции координат $\operatorname{div}\mathbf{F}$ нам известно, то мы можем снова заняться поверхностным интегралом по большому объему. Запишем вначале равенство (46) следующим образом:

$$\int\limits_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{S_i} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^{N} V_i \left[\frac{\int\limits_{S_i} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{a}_i}{V_i} \right]. \tag{50}$$

В пределе, когда $N \to \infty$, $V_i \to 0$, величина в скобках становится дивергенцией функции $\mathbf{F}$ и сумма переходит в объемный интеграл:

$$\boxed{\int\limits_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{a} = \int\limits_V \operatorname{div}\mathbf{F}\, dv.} \tag{51}$$

Уравнение (51) носит название *теоремы Гаусса*, или *теоремы дивергенции*. Оно справедливо для любого векторного поля, для которого существует предел, написанный в формуле (49).

Посмотрим, что это дает для электрического поля $\mathbf{E}$. Нам известен закон Гаусса, имеющий вид

$$\int\limits_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = 4\pi \int\limits_V \rho\, dv. \tag{52}$$

Если теорема дивергенции справедлива для любого векторного поля, то она, конечно, справедлива и для $\mathbf{E}$:

$$\int\limits_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \int\limits_V \operatorname{div}\mathbf{E}\, dv. \tag{53}$$

Оба уравнения (52) и (53) справедливы для любого выбранного объема любой формы, размеров и расположения. Сравнивая эти уравнения, мы видим, что условием их справедливости является

$$\boxed{\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho} \tag{54}$$

в каждой точке.

Если мы отныне примем теорему дивергенции в число математических теорем, которыми мы обычно пользуемся, то уравнение (54) можно рассматривать просто как одну из формулировок закона Гаусса. Это — закон Гаусса в дифференциальной форме, выраженный через локальное соотношение между плотностью заряда и электрическим полем.