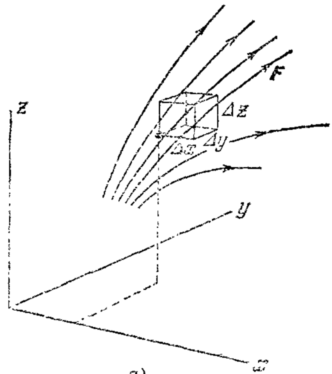
2.11. Дивергенция в декартовых координатах

Уравнение (49) является фундаментальным определением *дивергенции*, не зависящим от системы координат. Полезно знать, как вычисляется дивергенция векторной функции, заданной в определенной системе координат. Предположим, что векторная функция **F** выражена в декартовых координатах x, y, z. Это означает, что мы имеем три скалярные функции $F_x(x, y, z)$, $F_y(x, y, z)$ и $F_z(x, y, z)$. Рассмотрим объем V_i в форме небольшого прямоугольного ящика со сторонами Δx, Δy и Δz (рис. 2.16, *а*), один из углов которого совмещен с точкой (x, y, z). Вопрос о том, дает ли другая форма объема то же значение предела, мы рассмотрим позже.



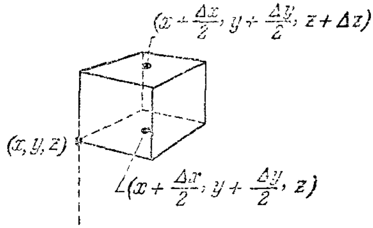


Рис. 2.16. Вычисление потока из ящика объемом $\Delta x \Delta y \Delta z$.

Возьмем две противоположные поверхности ящика, например верхнюю и нижнюю, которые выражаются векторами $\hat{\mathbf{z}}\Delta x\Delta y$ и $-\hat{\mathbf{z}}\Delta x\Delta y$. Поток через эти поверхности образован только z-компонентой **F** и результирующий поток зависит от р а з н о с т и между F_z на верхней поверхности и F_z на нижней, или, более точно, от разности между средним значением F_z на верхней поверхности и средним значением F_z на нижней поверхности ящика. Эта разность равна $(\partial F_z/\partial z)\Delta z$ с точностью до первого порядка малости. Рис. 2.16, *б* поясняет сказанное. Среднее значение F_z на нижней поверхности ящика, с точностью до первого порядка малости, близко к значению F_z в центре прямоугольника. Эта последняя величина равна с точностью до первого порядка *) относительно Δx и Δy:

$$F_z(x, y, z)+\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial F_z}{\partial x}+\frac{\Delta y}{2}\frac{\partial F_z}{\partial y}. \tag{55}$$

---

*) Это выражение представляет собой начало разложения скалярной функции F_z в ряд Тэйлора в окрестности точки (x, y, z). Следовательно,

$$F_z(x+a,\ y+b,\ z+c)=F_z(x, y, z)+$$
$$+\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\frac{\partial}{\partial z}\right)F_z+\ldots+\frac{1}{n!}\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\frac{\partial}{\partial z}\right)^n F_z+\ldots$$

Все производные должны быть вычислены в точке (x, y, z). В нашем случае $a=\Delta x/2$, $b=\Delta y/2$, $c=0$, причем члены ряда высшего порядка мы опускаем.

За среднее значение функции F_z на верхней поверхности мы принимаем ее значение в центре этой поверхности, опять с точностью до величин первого порядка относительно малых смещений:

$$F_z(x,\ y,\ z)+\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial F_z}{\partial x}+\frac{\Delta y}{2}\frac{\partial F_z}{\partial y}+\Delta z\frac{\partial F_z}{\partial z}. \tag{56}$$

Следовательно, результирующий поток наружу из ящика через две эти поверхности, площадь каждой из которых равна $\Delta x\Delta y$, равен

$$\underbrace{\Delta x\,\Delta y\left[F_z(x,\ y,\ z)+\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial F_z}{\partial x}+\frac{\Delta y}{2}\frac{\partial F_z}{\partial y}+\Delta z\frac{\partial F_z}{\partial z}\right]-}_{\text{(поток из ящика наружу через верхнюю поверхность)}}$$

$$\underbrace{-\Delta x\,\Delta y\left[F_z(x,\ y,\ z)+\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial F_z}{\partial x}+\frac{\Delta y}{2}\frac{\partial F_z}{\partial y}\right]}_{\text{(поток в ящик через нижнюю поверхность)}} \tag{57}$$

и сводится к выражению $\Delta x\Delta y\Delta z\ (\partial F_z/\partial z)$. Очевидно, что подобные рассуждения следует применить и для двух других пар поверхностей.

Таким образом, результирующий поток из ящика наружу через поверхности, параллельные плоскости yz, равен $\Delta y\Delta z\Delta x\ (\partial F_x/\partial x)$.

Обратите внимание, что здесь также присутствует произведение $\Delta x\Delta y\Delta z$. Следовательно, полный поток из небольшого ящика наружу равен

$$\Phi=\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}\right). \tag{58}$$

Объем ящика равен $\Delta x\Delta y\Delta z$, таким образом, отношение потока к объему равно

$$\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z},$$

и поскольку в это отношение не входят размеры ящика, оно стремится к постоянному пределу при уменьшении объема ящика. (Если бы, при вычислении потока, мы оставили члены, пропорциональные $(\Delta x)^2$, $(\Delta x\Delta y)$ и т. д., то при переходе к пределу они, конечно, исчезли бы.)

Теперь мы начинаем понимать, почему этот предел не зависит от формы ящика. Очевидно, что он не зависит от пропорций прямоугольного ящика, но это далеко не все. Легко понять, что этот предел будет одинаковым для любого объема, который мы можем создать, складывая небольшие прямоугольные ящики любого размера и формы. Рассмотрим два таких ящика на рис. 2.17, *а*. Сумма потоков Φ_1 наружу из ящика 1 и Φ_2 наружу из ящика 2 не изменится, если, удалив смежные стенки, мы образуем один ящик, показанный на рис. 2.17, *б*. Действительно, какой бы поток ни вытекал через эти смежные стенки, он всегда будет отрицательным для одной стенки и положительным для другой. Следовательно, даже такая причудливая форма ящика, как показанная на рис. 2.17, *в*, не изменит результат. Оставляем дальнейшее обобщение этого вопроса читателю. Доказав предварительно, что векторная сумма четырех поверхностей тетраэдра (рис. 2.18) равна нулю, вы сможете рассмотреть более общий случай наклонных поверхностей.

Мы приходим к выводу, что при обязательном условии дифференцируемости функций F_x, F_y и F_z искомый предел существует и дается выражением

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \qquad (59)$$

Если величина $\operatorname{div}\mathbf{F}$ в некоторой точке положительна, то можно определить, считая $\mathbf{F}$ полем скоростей, результирующий «поток наружу» в окрестности этой точки. Например, если все три частные производные, входящие в уравнение (59), положительны в точке P, то в окрестности этой точки мы будем иметь векторное поле, подобное изображенному на рис. 2.19. Но поле может быть совершенно другим и все-таки иметь положительную дивергенцию, так как на него можно наложить любую векторную функцию $\mathbf{G}$ при условии, что $\operatorname{div}\mathbf{G}=0$.

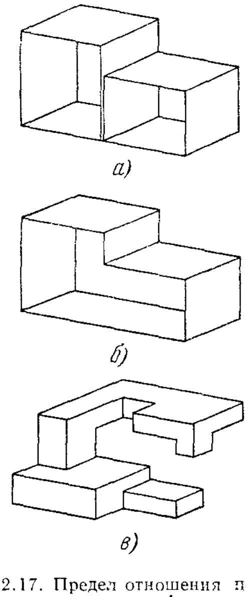


Рис. 2.17. Предел отношения потока к объему не зависит от формы ящика.

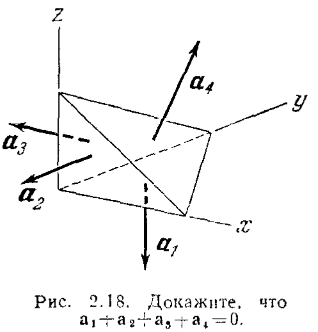


Рис. 2.18. Докажите, что $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_4=0$.

Таким образом, одна или две из трех частных производных могут иметь отрицательную величину, а $\operatorname{div}\mathbf{F}$ будет все еще больше нуля. Дивергенция — это величина, которая определяет только один аспект пространственного изменения векторного поля.

Применим эти рассуждения к электрическому полю, которое легко мысленно представить. Пусть, например, бесконечно длинный круговой цилиндр радиусом a заполнен положительным зарядом, распределенным с плотностью ρ. Вне цилиндра электрическое поле совпадает с полем линейного заряда на оси цилиндра. Это — радиальное поле, величина которого пропорциональна $1/r$. Поле внутри цилиндра мы найдем, применяя закон Гаусса к цилиндру радиусом $r<a$. Вы легко решите эту задачу и обнаружите, что поле внутри цилиндра прямо пропорционально r и, конечно, также является радиальным. Точные значения поля будут следующими:

$$\begin{aligned} E &= \frac{2\pi\rho a^2}{r} \quad \text{для} \quad r > a, \\ E &= 2\pi\rho r \quad \text{для} \quad r < a. \end{aligned} \tag{60}$$

На рис. 2.20 изображено поперечное сечение цилиндра, перпендикулярное к его оси. В данном случае выбор прямоугольных координат

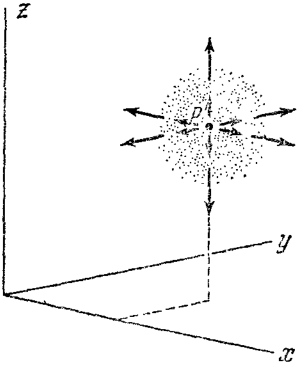


Рис. 2.19. Показано поле, дивергенция которого в окрестности точки P не равна нулю.

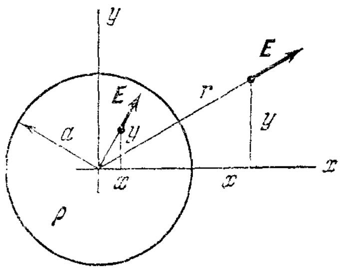


Рис. 2.20. Поле внутри и снаружи цилиндра с равномерным распределением заряда ($E=2\pi\rho a^2/r$ снаружи, $E=2\pi\rho r$ внутри).

является не особенно удачным, но мы воспользуемся ими, чтобы немного попрактиковаться в применении уравнения (59). При $r=\sqrt{x^2+y^2}$ компоненты поля можно выразить следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} E_x &= \begin{cases} \left(\dfrac{x}{r}\right) E = \dfrac{2\pi\rho a^2 x}{x^2+y^2} & \text{для} \quad r > a, \\ 2\pi\rho x & \text{для} \quad r < a, \end{cases} \\ E_y &= \begin{cases} \left(\dfrac{y}{r}\right) E = \dfrac{2\pi\rho a^2 y}{x^2+y^2} & \text{для} \quad r > a, \\ 2\pi\rho y & \text{для} \quad r < a. \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

Компонента E_z, конечно, равна нулю. Вне заряженного цилиндра div **E** равна

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 2\pi\rho a^2 \left[\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right] = 0. \tag{62}$$

Внутри цилиндра div **E** равна

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 2\pi\rho\,(1+1) = 4\pi\rho. \tag{63}$$

Этих результатов можно было ожидать. Вне цилиндра, где нет заряда, конечный поток, вытекающий из любого объема — и большого и малого,— равен нулю, так что предел отношения потока к объему, конечно, равен нулю. Внутри цилиндра мы получили результат, следующий из фундаментального соотношения (54).

2.12. Лапласиан

Нам теперь известны две скалярные функции, связанные с электрическим полем: потенциальная функция φ и дивергенция $\operatorname{div}\mathbf{E}$. В декартовых координатах эти связи выражаются равенствами

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -\left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right), \tag{64}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \tag{65}$$

Из (64) следует, что x-компонента поля $\mathbf{E}$ равна $E_x = -\partial\varphi/\partial x$. Подставляя это выражение и соответствующие выражения для E_y и E_z в (65), мы получим выражение, связывающее $\operatorname{div}\mathbf{E}$ и φ:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = -\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = -\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right). \tag{66}$$

Операцию над φ, которая производится уравнением (66), исключая знак минус, можно назвать «div grad» или «взятием дивергенции от градиента». Символ, которым обычно обозначают эту операцию, имеет вид ∇^2 и называется *оператором Лапласа*, или просто *лапласианом*. Выражение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

представляет собой лапласиан в декартовых координатах.

Обозначение ∇^2 имеет следующий смысл. Оператор градиента часто обозначают символом ∇ и называют «набла». В декартовых координатах он имеет вид

$$\nabla = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{67}$$

Считая это выражение вектором, получим, что его квадрат

$$\nabla\cdot\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{68}$$

совпадает с выражением для лапласиана в декартовых координатах. Поэтому лапласиан часто называют «набла в квадрате» и мы говорим «набла квадрат φ», подразумевая «div grad φ». (Предостережение: в других системах координат, например в сферических полярных координатах, оператор градиента и оператор Лапласа не связаны таким образом. Полезно помнить, что фундаментальное определение