Этих результатов можно было ожидать. Вне цилиндра, где нет заряда, конечный поток, вытекающий из любого объема — и большого и малого,— равен нулю, так что предел отношения потока к объему, конечно, равен нулю. Внутри цилиндра мы получили результат, следующий из фундаментального соотношения (54).

2.12. Лапласиан

Нам теперь известны две скалярные функции, связанные с электрическим полем: потенциальная функция φ и дивергенция $\operatorname{div}\mathbf{E}$. В декартовых координатах эти связи выражаются равенствами

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -\left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right), \tag{64}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \tag{65}$$

Из (64) следует, что x-компонента поля $\mathbf{E}$ равна $E_x = -\partial\varphi/\partial x$. Подставляя это выражение и соответствующие выражения для E_y и E_z в (65), мы получим выражение, связывающее $\operatorname{div}\mathbf{E}$ и φ:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = -\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = -\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right). \tag{66}$$

Операцию над φ, которая производится уравнением (66), исключая знак минус, можно назвать «div grad» или «взятием дивергенции от градиента». Символ, которым обычно обозначают эту операцию, имеет вид ∇^2 и называется *оператором Лапласа*, или просто *лапласианом*. Выражение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

представляет собой лапласиан в декартовых координатах.

Обозначение ∇^2 имеет следующий смысл. Оператор градиента часто обозначают символом ∇ и называют «набла». В декартовых координатах он имеет вид

$$\nabla = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{67}$$

Считая это выражение вектором, получим, что его квадрат

$$\nabla\cdot\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{68}$$

совпадает с выражением для лапласиана в декартовых координатах. Поэтому лапласиан часто называют «набла в квадрате» и мы говорим «набла квадрат φ», подразумевая «div grad φ». (Предостережение: в других системах координат, например в сферических полярных координатах, оператор градиента и оператор Лапласа не связаны таким образом. Полезно помнить, что фундаментальное определение оператора Лапласа заключается в том, что он является «дивергенцией градиента...».)

Теперь можно непосредственно выразить локальное соотношение между плотностью заряда и потенциальной функцией в окрестности некоторой точки. Применяя закон Гаусса в дифференциальной форме $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$, мы получим

$$\boxed{\nabla^2\varphi = -4\pi\rho.} \tag{69}$$

Уравнение (69), иногда называемое *уравнением Пуассона*, связывает плотность заряда со вторыми производными потенциала. В декартовой системе координат оно имеет вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -4\pi\rho. \tag{70}$$

Это уравнение можно рассматривать как дифференциальное выражение, соответствующее интегралу (17), с помощью которого потенциал в точке вычислялся как сумма вкладов от всех, далеких и близких, источников *).

2.13. Уравнение Лапласа

Всюду, где $\rho = 0$, т. е. во всех частях пространства, не содержащего электрических зарядов, электрический потенциал φ должен удовлетворять уравнению

$$\boxed{\nabla^2\varphi = 0.} \tag{71}$$

Оно называется *уравнением Лапласа* и находит применение во многих разделах физики. Действительно, с математической точки зрения, теория классических полей в большинстве случаев занимается изучением решений этого уравнения. Класс функций, удовлетворяющих уравнению Лапласа, называется *гармоническими функциями*. Они обладают рядом замечательных свойств, одно из которых заключается в следующем: *если функция $\varphi(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, то среднее значение φ по поверхности любой сферы (не обязательно небольшой) равно значению φ в центре сферы.* Это легко доказать для электрического потенциала φ в областях, не содержащих зарядов. Рассмотрим сферу S в поле точечного заряда q, который расположен вне сферы (рис. 2.21). Представим некий пробный заряд величины q', равномерно распределенный по этой

*) Действительно, можно показать, что уравнение (70) является математическим эквивалентом уравнения (17). Это означает, что, применяя оператор Лапласа к интегралу уравнения (17), вы получите $-4\pi\rho$. Мы не будем останавливаться на этом; поверьте нам на слово или получите этот результат сами.