оператора Лапласа заключается в том, что он является «дивергенцией градиента...».)

Теперь можно непосредственно выразить локальное соотношение между плотностью заряда и потенциальной функцией в окрестности некоторой точки. Применяя закон Гаусса в дифференциальной форме $\operatorname{div} \mathbf{E}=4\pi\rho$, мы получим

$$\boxed{\nabla^2\varphi = -4\pi\rho.} \tag{69}$$

Уравнение (69), иногда называемое *уравнением Пуассона*, связывает плотность заряда со вторыми производными потенциала. В декартовой системе координат оно имеет вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=-4\pi\rho. \tag{70}$$

Это уравнение можно рассматривать как дифференциальное выражение, соответствующее интегралу (17), с помощью которого потенциал в точке вычислялся как сумма вкладов от всех, далеких и близких, источников *).

2.13. Уравнение Лапласа

Всюду, где $\rho=0$, т. е. во всех частях пространства, не содержащего электрических зарядов, электрический потенциал φ должен удовлетворять уравнению

$$\boxed{\nabla^2\varphi = 0.} \tag{71}$$

Оно называется *уравнением Лапласа* и находит применение во многих разделах физики. Действительно, с математической точки зрения, теория классических полей в большинстве случаев занимается изучением решений этого уравнения. Класс функций, удовлетворяющих уравнению Лапласа, называется *гармоническими функциями*. Они обладают рядом замечательных свойств, одно из которых заключается в следующем: *если функция $\varphi(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, то среднее значение φ по поверхности любой сферы (не обязательно небольшой) равно значению φ в центре сферы*. Это легко доказать для электрического потенциала φ в областях, не содержащих зарядов. Рассмотрим сферу S в поле точечного заряда q, который расположен вне сферы (рис. 2.21). Представим некий пробный заряд величины q', равномерно распределенный по этой

*) Действительно, можно показать, что уравнение (70) является математическим эквивалентом уравнения (17). Это означает, что, применяя оператор Лапласа к интегралу уравнения (17), вы получите $-4\pi\rho$. Мы не будем останавливаться на этом; поверьте нам на слово или получите этот результат сами.

сфере. Работа, которая требуется для создания такого распределения заряда q', равна произведению q' на среднее по сфере значение потенциала, обусловленного зарядом q. Но мы знаем, что эта работа должна быть такой же, как если бы мы имели вначале пробный заряд q' и затем перенесли заряд q из бесконечности, и что в этом случае работа должна быть такой же, как если бы заряд q' был сосредоточен в центре сферы, вместо того чтобы быть распределенным по поверхности. Это доказывает утверждение для данного случая.

Поскольку потенциалы нескольких источников просто складываются, то это должно быть справедливо для любой системы источников, расположенных вне сферы S.

Рис. 2.21. Работа, требуемая для перенесения заряда q' и распределения его по сфере, равна произведению q' на *среднее* значение потенциала, обусловленного зарядом q, по той же сфере.

Это свойство потенциала тесно связано с фактом, который может вас разочаровать; нельзя создать такое электрическое поле, которое удержит заряженную частицу в состоянии *устойчивого* равновесия в вакууме. Эта «теорема невозможности» подобно другим физическим теоремам помогает экономить время, затрачиваемое на бесполезные размышления. Посмотрим, почему эта теорема верна. Предположим, что мы имеем электрическое поле, в котором, вопреки теореме, имеется точка P, где положительно заряженная частица находится в состоянии устойчивого равновесия. Это означает, что любое малое смещение частицы из точки P должно привести частицу в точку, из которой она вернется обратно в точку P под действием электрического поля. Но это означает, что небольшая сфера вокруг точки P должна иметь поле $\mathbf{E}$, направленное внутрь всюду на ее поверхности. Это противоречит закону Гаусса, так как внутри области нет источника отрицательного заряда. (Наша заряженная пробная частица в счет не идет; кроме того, она положительна.) Другими словами, не может быть такой пустой области, где все электрическое поле направлено внутрь или наружу, а это как раз и требуется для устойчивого равновесия. Выражая тот же факт через электрический потенциал, можно сказать, что устойчивым положением для заряженной частицы должно быть такое положение, когда потенциал φ или меньше потенциалов во всех соседних точках (если частица заряжена положительно), или больше (если частица заряжена отрицательно.) Ясно, что ни то, ни другое невозможно для функции, среднее значение которой по сфере всегда равно ее значению в центре.

Конечно, заряженная частица может находиться в равновесии в электростатическом поле в том смысле, что сила, действующая на нее, равна нулю. Точка на рис. 1.10, в которой $\mathbf{E}=0$, может служить таким примером. Среднее положение между двумя равными положительными зарядами является положением равновесия для третьего заряда, каким бы ни был его знак. Но это равновесие неустойчиво. (Что произойдет, если третий заряд немного сместить из этого положения равновесия?) Заметим, что при помощи электрических полей, меняющихся во времени, можно поймать и удержать заряженную частицу в состоянии устойчивого равновесия.

2.14. Различие между физикой и математикой

В двух последних разделах мы имели дело с математическими соотношениями и новыми способами выражения известных фактов. Подумаем о том, что произошло бы, если бы электрическая сила не подчинялась закону обратных квадратов расстояния, а была силой, имеющей ограниченный радиус действия, например, силой типа

$$\frac{e^{-\lambda r}}{r^2}. \qquad (72)$$

Такой анализ поможет нам отделить физику от математики и закон от определения. Очевидно, что в этом случае закон Гаусса в интегральной форме (52) не был бы справедлив, так как на очень большой поверхности, охватывающей несколько источников, величина поля была бы исчезающе малой. По мере увеличения поверхности поток не оставался бы постоянным, а стремился к нулю. Однако в каждой точке пространства еще можно было бы определить поле.

Можно вычислить дивергенцию этого поля, причем уравнение (53), описывающее математическое свойство любого векторного поля, будет еще справедливым. Есть ли здесь противоречие? Нет, так как уравнение (54) выполняться не будет.

Дивергенция поля уже не равна плотности источника. Это можно понять, замечая, что через малый объем, в котором нет источников, все же может проходить конечный поток, если поле от источника, расположенного вне объема, ограничено в пространстве. Как видно из рис. 2.22, в ту часть поверхности нашего объема, которая обращена к источнику, входит большой поток, тогда как поток, выходящий из объема, очень мал.

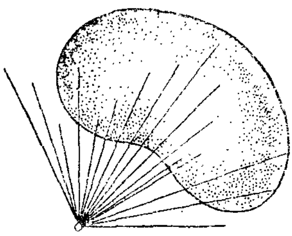

Рис. 2.22. В поле, не подчиняющемся закону обратных квадратов, поток через замкнутую поверхность не равен нулю.

Таким образом, мы можем утверждать, что равенства (52) и (54) выражают один и тот же физический закон, закон обратных квадратов, открытый Кулоном при непосредственном измерении сил, действующих между заряженными телами, в то время как равенство (53) является выражением математической теоремы, позволяющей перевести формулировку этого закона из дифференциальной формы в интегральную или наоборот.

Как можно объяснить эти дифференциальные соотношения между источником и полем в мире, где электрический заряд в действи-