го заряда, каким бы ни был его знак. Но это равновесие неустойчиво. (Что произойдет, если третий заряд немного сместить из этого положения равновесия?) Заметим, что при помощи электрических полей, меняющихся во времени, можно поймать и удержать заряженную частицу в состоянии устойчивого равновесия.

2.14. Различие между физикой и математикой

В двух последних разделах мы имели дело с математическими соотношениями и новыми способами выражения известных фактов. Подумаем о том, что произошло бы, если бы электрическая сила не подчинялась закону обратных квадратов расстояния, а была силой, имеющей ограниченный радиус действия, например, силой типа

$$\frac{e^{-\lambda r}}{r^2}. \tag{72}$$

Такой анализ поможет нам отделить физику от математики и закон от определения. Очевидно, что в этом случае закон Гаусса в интегральной форме (52) не был бы справедлив, так как на очень большой поверхности, охватывающей несколько источников, величина поля была бы исчезающе малой. По мере увеличения поверхности поток не оставался бы постоянным, а стремился к нулю. Однако в каждой точке пространства еще можно было бы определить поле.

Можно вычислить дивергенцию этого поля, причем уравнение (53), описывающее математическое свойство *любого* векторного поля, будет еще справедливым. Есть ли здесь противоречие? Нет, так как уравнение (54) выполняться не будет.

Дивергенция поля уже не равна плотности источника. Это можно понять, замечая, что через малый объем, в котором нет источников, все же может проходить конечный поток, если поле от источника, расположенного *вне объема*, ограничено в пространстве. Как видно из рис. 2.22, в ту часть поверхности нашего объема, которая обращена к источнику, входит большой поток, тогда как поток, выходящий из объема, очень мал.

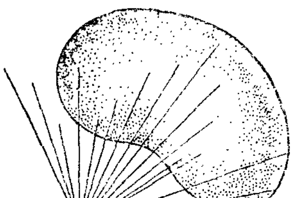

Рис. 2.22. В поле, не подчиняющемся закону обратных квадратов, поток через замкнутую поверхность не равен нулю.

Таким образом, мы можем утверждать, что равенства (52) и (54) выражают один и тот же *физический закон*, закон обратных квадратов, открытый Кулоном при непосредственном измерении сил, действующих между заряженными телами, в то время как равенство (53) является выражением *математической теоремы*, позволяющей перевести формулировку этого закона из дифференциальной формы в интегральную или наоборот.

Как можно объяснить эти дифференциальные соотношения между источником и полем в мире, где электрический заряд в действительности представляет собой не равномерное «желе», а концентрацию частиц, о внутреннем строении которых мы так мало знаем? Действительно, уравнение Пуассона (69), имеет смысл только в макроскопическом масштабе. Плотность заряда ρ можно интерпретировать как среднюю величину заряда, распределенного по некоторой малой, но конечной области, содержащей большое количество частиц. Следовательно, функция ρ не может быть непрерывной в математическом смысле. Когда мы уменьшаем область V_i при выводе дифференциальной формы закона Гаусса, то как физики мы знаем, что не должны уменьшать ее слишком сильно. Может быть, в этом неудобно признаться, но фактически мы хорошо разбираемся в непрерывных моделях только для крупномасштабных электрических систем. В атомном мире имеются элементарные частицы и вакуум. Внутри частиц, если закон Кулона играет там какую-то роль, происходит много других явлений. Вакуум в электростатике подчиняется уравнению Лапласа. Однако мы не уверены, что даже в вакууме переход к нулевым размерам имеет ф и з и ч е с к и й смысл.

2.15. Ротор векторной функции

Понятие о дивергенции как о локальном свойстве векторного поля было выяснено при рассмотрении интеграла по большой замкнутой поверхности. Рассмотрим теперь линейный интеграл некоторого векторного поля $\mathbf{F}(x, y, z)$, взятый по замкнутому пути, а именно по кривой C. Кривую C можно рассматривать как границу некоторой стягивающей ее поверхности S. Хорошим названием для величины такого линейного интеграла, взятого по замкнутому пути, является циркуляция; для обозначения циркуляции мы будем пользоваться греческой буквой Γ:

$$\Gamma = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \tag{73}$$

В подынтегральном выражении $d\mathbf{s}$ является элементом пути, т. е. бесконечно малым вектором, касательным в любом месте к кривой C (рис. 2.23, *а*). Имеются два направления, по которым можно обойти C; мы должны выбрать одно из них, чтобы направление $d\mathbf{s}$ было определенным. В общем случае кривая C может быть не плоской, а как угодно изогнутой.

Пересечем поверхность C по пути B, образовав таким образом две смежные петли C_1 и C_2, в каждую из которых входит путь B (рис. 2.23, *б*). Вычислим линейный интеграл по каждой из этих петель, придерживаясь выбранного направления. Легко видеть, что сумма двух этих циркуляций Γ_1 и Γ_2 будет равна первоначальной циркуляции вдоль петли C: это объясняется тем, что путь B проходится при двух интегрированиях в противоположных направлениях, поэтому вклад в интеграл дают лишь те части петель, которые в сумме составляют первоначальную петлю C. Дальнейшее разделе-