

тельности представляет собой не равномерное «желе», а концентрацию частиц, о внутреннем строении которых мы так мало знаем? Действительно, уравнение Пуассона (69), имеет смысл только в макроскопическом масштабе. Плотность заряда ρ можно интерпретировать как среднюю величину заряда, распределенного по некоторой малой, но конечной области, содержащей большое количество частиц. Следовательно, функция ρ не может быть непрерывной в математическом смысле. Когда мы уменьшаем область V_i при выводе дифференциальной формы закона Гаусса, то как физики мы знаем, что не должны уменьшать ее слишком сильно. Может быть, в этом неудобно признаться, но фактически мы хорошо разбираемся в непрерывных моделях только для крупномасштабных электрических систем. В атомном мире имеются элементарные частицы и вакуум. Внутри частиц, если закон Кулона играет там какую-то роль, происходит много других явлений. Вакуум в электростатике подчиняется уравнению Лапласа. Однако мы не уверены, что даже в вакууме переход к нулевым размерам имеет физический смысл.

2.15. Ротор векторной функции

Понятие о дивергенции как о локальном свойстве векторного поля было выяснено при рассмотрении интеграла по большой замкнутой поверхности. Рассмотрим теперь линейный интеграл некоторого векторного поля $\mathbf{F}(x, y, z)$, взятый по замкнутому пути, а именно по кривой C . Кривую C можно рассматривать как границу некоторой стягивающей ее поверхности S . Хорошим названием для величины такого линейного интеграла, взятого по замкнутому пути, является циркуляция; для обозначения циркуляции мы будем пользоваться греческой буквой Γ :

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \quad (73)$$

В подынтегральном выражении $d\mathbf{s}$ является элементом пути, т. е. бесконечно малым вектором, касательным в любом месте к кривой C (рис. 2.23, а). Имеются два направления, по которым можно обойти C ; мы должны выбрать одно из них, чтобы направление $d\mathbf{s}$ было определенным. В общем случае кривая C может быть не плоской, а как угодно изогнутой.

Пересечем поверхность S по пути B , образовав таким образом две смежные петли C_1 и C_2 , в каждую из которых входит путь B (рис. 2.23, б). Вычислим линейный интеграл по каждой из этих петель, придерживаясь выбранного направления. Легко видеть, что сумма двух этих циркуляций Γ_1 и Γ_2 будет равна первоначальной циркуляции вдоль петли C : это объясняется тем, что путь B проходится при двух интегрированиях в противоположных направлениях, поэтому вклад в интеграл дают лишь те части петель, которые в сумме составляют первоначальную петлю C . Дальнейшее разделе-

ние на большое количество петель $C_1, \dots, C_i, \dots, C_N$ не меняет величины суммы интегралов:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \sum_{i=1}^N \int_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}_i \quad \text{или} \quad \Gamma = \sum_{i=1}^N \Gamma_i. \quad (74)$$

Здесь также можно бесконечно продолжать деление с тем, чтобы в пределе получить количественную локальную характеристику поля \mathbf{F} .

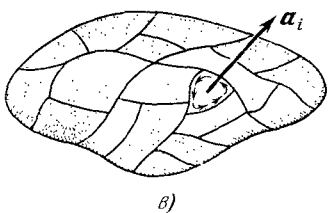
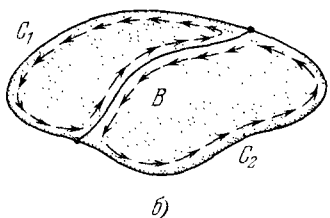
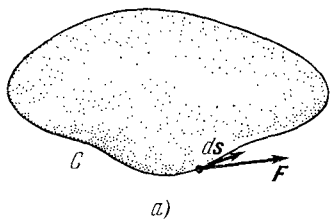


Рис. 2.23. Для разделенной петли сумма всех циркуляций Γ_i вокруг всех частей равна циркуляции Γ вокруг первоначальной кривой C .

При увеличении числа петель мы получаем петли с меньшей циркуляцией, но и с меньшей площадью. Поэтому естественно рассмотреть отношение циркуляции петли к площади петли, подобно тому как мы рассматривали в разделе 2.9 отношение потока к объему. Однако здесь ситуация несколько иная, так как площадь a_i элемента поверхности, стягивающей малую петлю C_i , является в действительности вектором; поверхность имеет ориентацию в пространстве. Мы не можем взять отношение скалярной величины к векторной! Действительно, поскольку в окрестности данной точки мы берем петли все меньшего и меньшего размера, то для петли можно выбрать любое направление ориентации. (Вспомните, что мы не связаны с определенной поверхностью, стягивающей кривую C .) Поэтому мы можем перейти к пределу существенно различными путями, а результат должен это отразить.

Выберем некоторую определенную ориентацию для элемента поверхности в одной из последних стадий разбиения. Единичный вектор $\hat{\mathbf{n}}$ обозначает нормаль к этому элементу; она должна оставаться постоянной при уменьшении пути, окружающего выбранную точку P .

Предел отношения циркуляции к площади участка можно записать следующим образом:

$$\lim_{a_i \rightarrow 0} \frac{\Gamma_i}{a_i} \quad \text{или} \quad \lim_{a_i \rightarrow 0} \frac{\int_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}{a_i}. \quad (75)$$

Знаки, которыми связаны направление нормали $\hat{\mathbf{n}}$ и направление обхода C_i в линейном интеграле, подчиняются правилу буравчика

(рис. 2.24). Предел, получаемый при этой операции, представляет собой скалярную величину, связанную в векторном поле \mathbf{F} с точкой P и направлением $\hat{\mathbf{n}}$. Можно выбрать три независимых направления, например $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ и $\hat{\mathbf{z}}$, и получить три различных числа. Оказывается, что эти три числа являются компонентами вектора. Мы называем этот вектор ротором \mathbf{F} . Таким образом, можно сказать, что предел, который мы получим для определенного направления $\hat{\mathbf{n}}$, является величиной проекции $\text{rot } \mathbf{F}$ на это направление. Сформулируем полученный результат в виде уравнения

$$\boxed{(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \lim_{a_i \rightarrow 0} \frac{\Gamma_i}{a_i} = \lim_{a_i \rightarrow 0} \frac{\oint_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}{a_i}} \quad (76)$$

Например, x -компонента $\text{rot } \mathbf{F}$ получена при выборе $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{x}}$ (рис. 2.25). Стягивая петлю вокруг точки P , мы оставляем ее в плоскости, перпендикулярной к оси x . В общем случае ротор вектора \mathbf{F} будет меняться от точки к точке. Если мы будем уменьшать поверхность около какой-нибудь другой точки, то отношение циркуляции к площади может иметь другое значение, в зависимости от характера

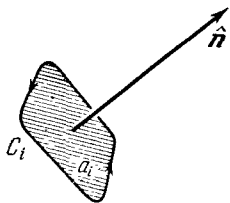


Рис. 2.24. Связь между нормалью к поверхности и направлением циркуляции линейного интеграла выражается правилом буравчика.

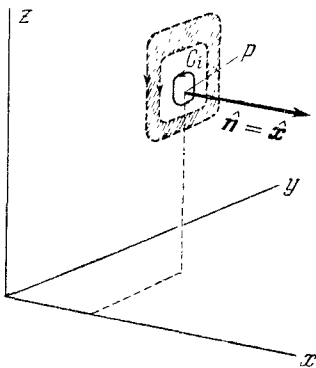


Рис. 2.25. Участок стягивается к P не изменяя направления своей нормали, совпадающего с осью x .

векторной функции \mathbf{F} . Следовательно, сам ротор \mathbf{F} является векторной функцией координат. Его направление в любой точке перпендикулярно к той плоскости, проходящей через эту точку, для которой величина циркуляции максимальна. Величина ротора является предельным значением циркуляции, приходящейся в этой плоскости на единицу площади, вокруг выбранной точки. Мы утверждаем, что определенный таким образом объект является вектором, — но это еще не доказано. Чтобы заслужить название вектора, компоненты, определенные таким образом, должны вести себя во всех отношениях

подобно компонентам вектора. Предположим, что мы нашли определенные значения для x -, y - и z -компонент, согласно выражению (76). Если затем мы выберем какое-то четвертое направление для вектора $\hat{\mathbf{n}}$, то проекция ротора, полученная из выражения (76), должна однозначно определяться тремя указанными компонентами, так как вектор задается тремя своими компонентами. Если этот вопрос вас интересует, обратитесь к задаче 2.24, которая убедит вас в том, что выражение (76) действительно определяет проекцию или компоненту вектора.

2.16. Теорема Стокса

От циркуляции вокруг бесконечно малого участка поверхности мы можем вернуться к циркуляции вокруг первоначальной большой петли C :

$$\Gamma = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \sum_{i=1}^N \Gamma_i = \sum_{i=1}^N a_i \left[\frac{\Gamma_i}{a_i} \right]. \quad (77)$$

Последний член мы просто умножили и разделили на a_i . Посмотрим теперь, что произойдет с правой частью уравнения, если N сильно возрастет, а все a_i уменьшатся. Величина в скобках станет равной $(\text{rot} \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_i$, где $\hat{\mathbf{n}}_i$ — единичный вектор, перпендикулярный к i -му участку. Итак, справа мы имеем сумму произведений площади участка на нормальную компоненту $(\text{rot} \mathbf{F})$ по всем участкам, составляющим поверхность S , стягивающую C . Это не что иное, как *поверхностный интеграл* по S от $\text{rot} \mathbf{F}$:

$$\sum_{i=1}^N a_i \left[\frac{\Gamma_i}{a_i} \right] = \sum_{i=1}^N a_i (\text{rot} \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_i \rightarrow \int_S da \cdot \text{rot} \mathbf{F}. \quad (78)$$

Следовательно, мы получили, что

$$\boxed{\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \text{rot} \mathbf{F} \cdot da.} \quad (79)$$

Соотношение (79) является математической теоремой, называемой теоремой Стокса. Заметьте, что по структуре она похожа на теорему Гаусса, т. е. на теорему дивергенции. Теорема Стокса связывает линейный интеграл от вектора с поверхностным интегралом от ротора вектора. Теорема Гаусса (формула (51)) связывает поверхностный интеграл от вектора с объемным интегралом от дивергенции вектора. Теорема Стокса имеет дело с поверхностью и кривой, огибающей эту поверхность. Теорема Гаусса относится к объему и охватывающей его поверхности.