2.17. Ротор в декартовых координатах

Равенство (76) является фундаментальным определением ротора $\mathbf{F}$, сформулированным без ссылки на какую-либо определенную систему координат. В этом отношении оно похоже на наше фундаментальное определение дивергенции (49). Как и в случае дивергенции, мы должны уметь вычислять $\operatorname{rot}\mathbf{F}$, если дана некоторая векторная функция $\mathbf{F}(x, y, z)$. Для этого мы выполним интегрирование, требуемое выражением (76), но сделаем это для пути, имеющего очень простую форму, а именно для пути, который охватывает прямоугольный участок поверхности, параллельный плоскости xy (рис. 2.26). Иными словами, мы берем $\hat{\mathbf{n}}=\hat{\mathbf{z}}$. В соответствии с принятым нами

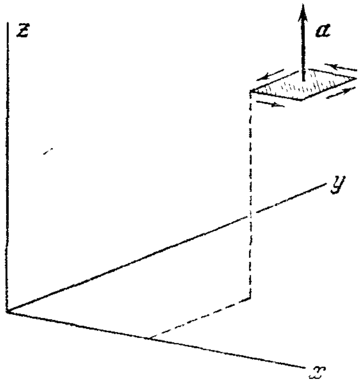

Рис. 2.26. Циркуляция вокруг прямоугольного участка $\hat{\mathbf{n}}=\hat{\mathbf{z}}$.

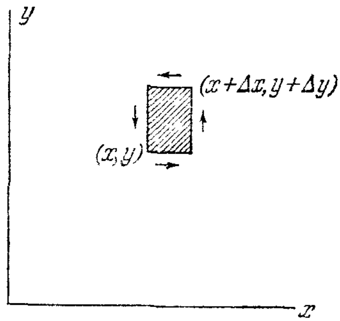

Рис. 2.27. Вид на участок рис. 2.26 сверху.

правилом знаков направление интегрирования по периметру должно происходить по часовой стрелке, если смотреть вверх в направлении $\hat{\mathbf{n}}$.

На рис. 2.27 мы смотрим на прямоугольник сверху вниз.

Линейный интеграл от $\mathbf{F}$ по такому пути зависит от изменения F_x с изменением y и от изменения F_y с изменением x, так как если F_x имеет то же среднее значение вдоль верхней части рамки (рис. 2.27), как и вдоль нижней ее стороны, то вклады обеих этих частей в линейный интеграл будут, очевидно, взаимно уничтожаться. Это замечание относится и к другим сторонам рамки. Разница между средним значением F_x по верхнему сегменту пути при $y+\Delta y$ и ее средним значением по нижнему сегменту при y равна, с точностью до первого порядка относительно малых величин Δx и Δy,

$$\left(\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\Delta y. \tag{80}$$

Мы используем здесь рассуждения, которые были высказаны в связи с рис. 2.16, *б*. Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} F_x &= F_x\,(x,\ y) + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial F_x}{\partial x} \\ &\qquad \text{(в середине нижней части рамки)}, \\ F_x &= F_x\,(x,\ y) + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial F_x}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial F_x}{\partial y} \\ &\qquad \text{(в середине верхней части рамки)}. \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

Эти средние значения получены с точностью до членов первого порядка в разложении Тэйлора. Их окончательный вклад в циркуляцию определяется произведением их разности, умноженной на длину элемента пути Δx. Этот вклад равен $-\Delta x\,\Delta y\,(\partial F_x/\partial y)$. Знак минус появляется потому, что интегрирование по верхней стороне площадки производится справа налево, так что если положительная компонента A_x больше сверху, то результирующий вклад в циркуляцию от верхнего и нижнего элемента пути будет отрицательным. Вклад от двух других сторон равен $\Delta y \Delta x\,(\partial F_y/\partial x)$ с положительным знаком, так как если положительная компонента F_y больше справа, то вклад этих двух сторон в циркуляцию будет положительным.

Таким образом, если пренебречь степенями высшего порядка относительно Δx и Δy, то линейный интеграл вдоль всего прямоугольного контура равен

$$\int\limits_{\square} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = (-\Delta x)\left(\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\Delta y + \Delta y\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}\right)\Delta x = \Delta x \Delta y\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right), \tag{82}$$

где произведение $\Delta x \Delta y$ равно площади прямоугольника, которую мы изобразим вектором, направленным по оси z. Очевидно, что величина

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \tag{83}$$

является пределом отношения

$$\frac{\text{линейный интеграл вокруг поверхности}}{\text{площадь поверхности}}, \tag{84}$$

когда площадь поверхности стремится к нулю. Если бы нормаль к прямоугольной поверхности совпадала с положительным направлением оси y, то для предела соответствующего отношения мы получили бы выражение

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \tag{85}$$

а если бы эта нормаль совпадала с направлением оси x, как это показано на правой части рис. 2.28, то мы получили бы

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}. \tag{86}$$

Несмотря на то, что мы рассматривали только прямоугольные поверхности, наш результат в действительности не зависит от формы малой поверхности и ограничивающего ее контура по тем же причинам, что и в случае теоремы о дивергенции. Ясно, например, что мы свободно можем соединять различные прямоугольники (образуя таким образом другие фигуры), так как линейные интегралы вдоль совпадающих участков границы полностью взаимно уничтожаются (рис. 2.29).

Мы пришли к выводу, что для любой ориентации поверхности предел отношения циркуляции к величине поверхности не зависит от выбранной формы поверхности. Таким образом, мы получаем общую формулу для компонент ротора вектора **F**, если **F** является функцией x, y и z:

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \hat{\mathbf{x}}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \hat{\mathbf{y}}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \hat{\mathbf{z}}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right). \quad (87)$$

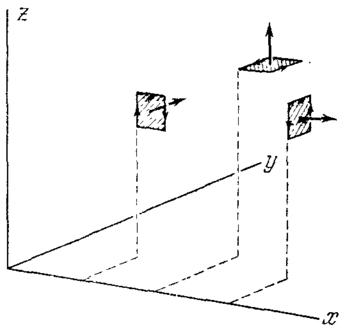

Рис. 2.28. Для любой ориентации предел отношения циркуляции к площади определяет компоненту rot **F** в этой точке. Для определения всех компонент rot **F** в любой точке все участки должны сгруппироваться вокруг этой точки; здесь они расположены на расстоянии для наглядности.

Ниже приводится правило, которое легче запомнить, чем саму формулу. Составьте следующий определитель:

$$\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}. \quad (88)$$

Разложите его по правилу разложения определителей, и вы получите выражение для rot **F**, приведенное в уравнении (87). Обратите

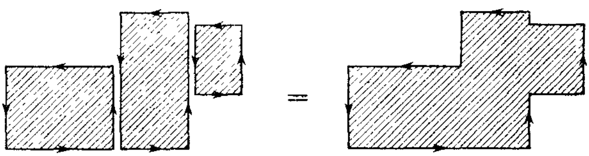

Рис. 2.29. Циркуляция в петле справа является суммой циркуляций в прямоугольниках; поверхность справа представляет собой сумму поверхностей прямоугольников. Этот рисунок показывает, почему отношение циркуляции к площади не зависит от формы.

внимание на то, что x-компонента rot **F** зависит от скорости изменения F_z в направлении оси y и отрицательной величины скорости изменения F_y в направлении оси z и т. д.

Если символ ∇ интерпретировать как вектор

$$\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z} \quad (89)$$

и написать $\nabla \times \mathbf{F}$, то по правилам образования компонент векторного произведения автоматически получим вектор, называемый ротором $\mathbf{F}$. Итак, $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ и $\nabla \times \mathbf{F}$ обозначают одну и ту же векторную величину.

2.18. Физический смысл ротора

Название «ротор» напоминает нам, что векторное поле, ротор которого не равен нулю, имеет циркуляцию или завихренность; Максвелл пользовался словом «вращение». Представим себе векторное поле скоростей $\mathbf{G}$, в котором $\operatorname{rot} \mathbf{G}$ не равен нулю. Тогда скорости в этом поле имеют примерно такой вид: или , и, возможно, налагаются на общий поток, текущий в одном направлении. Например поле скоростей воды, вытекающей из ванны, обычно имеет вид циркуляции. Его ротор не равен нулю по бо́льшей части поверхности. Если какая-нибудь вещь плывет на поверхности воды, то она вращается (см. задачи 2.16 и 2.26). В физике текущей жидкости, т. е. в гидродинамике и аэродинамике эта идея имеет первостепенное значение.

Чтобы построить «ротор-метр» для электрического поля — по крайней мере в воображении — положительные заряды следует прикрепить к ступице колеса изолирующими спицами (рис. 2.30). Изучая электрическое поле при помощи этого устройства, мы обнаружили бы, что там, где $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ не равен нулю, колесо стремится повернуться вокруг

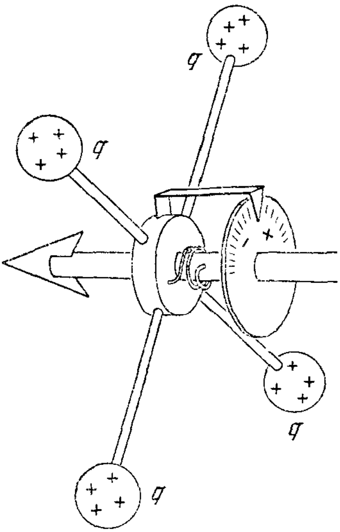

Рис. 2.30. «Ротор-метр».

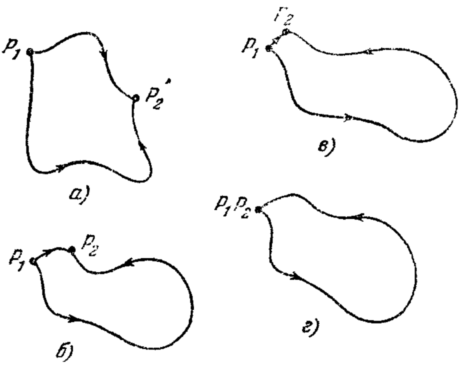

Рис. 2.31. Если линейный интеграл между точками P_1 и P_2 не зависит от пути, то линейный интеграл вдоль замкнутой петли должен быть равен нулю.

оси. С помощью пружины, препятствующей вращению, можно по углу закручивания определить вращающий момент, который будет пропорционален компоненте ротора вектора $\mathbf{E}$ в направлении оси. Если мы можем определить направление оси, для которого вра-