

и написать $\nabla \times \mathbf{F}$, то по правилам образования компонент векторного произведения автоматически получим вектор, называемый ротором \mathbf{F} . Итак, $\text{rot } \mathbf{F}$ и $\nabla \times \mathbf{F}$ обозначают одну и ту же векторную величину.

2.18. Физический смысл ротора

Название «ротор» напоминает нам, что векторное поле, ротор которого не равен нулю, имеет циркуляцию или завихренность; Максвелл пользовался словом «вращение». Представим себе векторное поле скоростей \mathbf{G} , в котором $\text{rot } \mathbf{G}$ не равен нулю. Тогда скорости в этом поле имеют примерно такой вид: $\begin{matrix} \leftarrow & \rightarrow \\ \uparrow & \downarrow \end{matrix}$ или $\begin{matrix} \leftarrow & \rightarrow \\ \downarrow & \uparrow \end{matrix}$, и, возможно, налагаются на общий поток, текущий в одном направлении. Например поле скоростей воды, вытекающей из ванны, обычно имеет вид циркуляции. Его ротор не равен нулю по большей части поверхности. Если какая-нибудь вещь плавает на поверхности воды, то она вращается (см. задачи 2.16 и 2.26). В физике текущей жидкости, т. е. в гидродинамике и аэродинамике эта идея имеет первостепенное значение.

Чтобы построить «ротор-метр» для электрического поля — по крайней мере в воображении — положительные заряды следует прикрепить к ступице колеса изолирующими спицами (рис. 2.30). Изучая электрическое поле при помощи этого устройства, мы обнаружили бы, что там, где $\text{rot } \mathbf{E}$ не равен нулю, колесо стремится повернуться вокруг

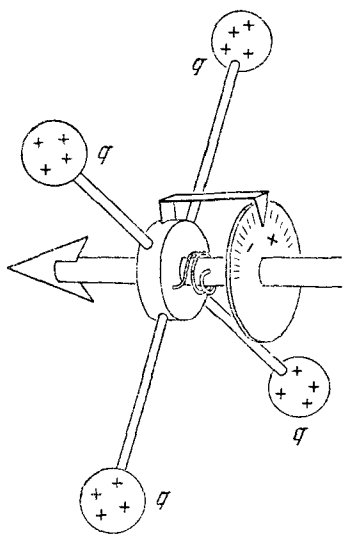


Рис. 2.30. «Ротор-метр».

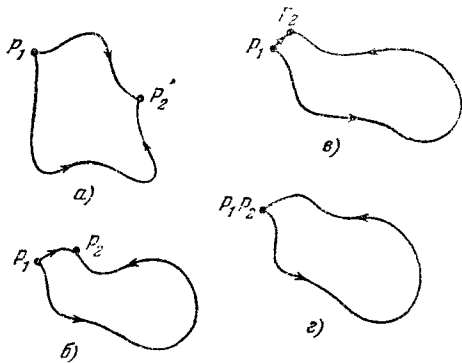


Рис. 2.31. Если линейный интеграл между точками P_1 и P_2 не зависит от пути, то линейный интеграл вдоль замкнутой петли должен быть равен нулю.

оси. С помощью пружины, препятствующей вращению, можно по углу закручивания определить вращающий момент, который будет пропорционален компоненте ротора вектора \mathbf{E} в направлении оси. Если мы можем определить направление оси, для которого вра-

щательный момент является максимальным и направлен по часовой стрелке, то это и есть направление ротора вектора \mathbf{E} . (Конечно, мы не можем доверять ротор-метру в поле, которое сильно изменяется в пределах самого ротор-метра.)

Что же можно сказать в свете всего этого об электростатическом поле \mathbf{E} ? Вывод прост: ротор-метр будет всегда показывать нуль! Это объясняется тем, что, как мы уже знаем, линейный интеграл от \mathbf{E} вдоль любого замкнутого контура в электростатическом поле равен нулю. Вспомните, что линейный интеграл от \mathbf{E} между двумя точками, например P_1 и P_2 (рис. 2.31), не зависит от пути. Если почти совместить две точки P_1 и P_2 , то линейный интеграл по самому короткому пути на рисунке, очевидно, близок к нулю, если конечное расположение точек не совпадает с такой особенностью, как точечный заряд; этот случай можно исключить. Итак, линейный интеграл по замкнутой петле (рис. 2.31, δ) должен быть равен нулю. Но, согласно теореме Стокса, если циркуляция равна нулю вокруг любого замкнутого пути, то поверхностный интеграл от ротора \mathbf{E} по участку любого размера, формы или расположения также равен нулю. Но тогда ротор \mathbf{E} должен быть равен нулю всюду, так как если бы он был где-нибудь не равен нулю, то мы всегда могли бы выбрать участок в этой окрестности для нарушения нашего заключения. Все вышесказанное ведет к простому утверждению: в электростатическом поле \mathbf{E}

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad (\text{всюду}). \quad (90)$$

Иными словами можно сказать, что уравнение (90) является достаточным условием для консервативности поля, т. е. для того, чтобы поле можно было описать градиентом некоторой потенциальной функции.

Это условие можно легко применить к делу. Когда впервые было введено понятие векторной функции (рис. 2.2), было сказано, что она представляет возможное электростатическое поле. Ее компонентами были выбраны величины $E_x = Ky$ и $E_y = Kx$, к которым, для завершения описания поля в трехмерном пространстве, следует добавить $E_z = 0$. Вычисляя $\operatorname{rot} \mathbf{E}$, находим

$$\left. \begin{aligned} (\operatorname{rot} \mathbf{E})_x &= \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0, \\ (\operatorname{rot} \mathbf{E})_y &= \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0, \\ (\operatorname{rot} \mathbf{E})_z &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = K - K = 0. \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

Следовательно, величина \mathbf{E} является градиентом какого-то скалярного потенциала. Очевидно, что поле такого вида \mathbf{E} должно иметь дивергенцию, равную нулю, следовательно,

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0. \quad (92)$$

Таким образом, такое поле представляет собой электростатическое поле в области, свободной от зарядов.

С другой стороны, ротор столь же простой векторной функции, определенной компонентами $F_x = Ky$, $F_y = -Kx$, $F_z = 0$, не равен нулю. Действительно,

$$(\text{rot } \mathbf{F})_z = -2K. \quad (93)$$

Ни одно электростатическое поле не может быть такого вида. Если вы начертите примерный вид такого поля, то сразу увидите, что оно имеет циркуляцию.

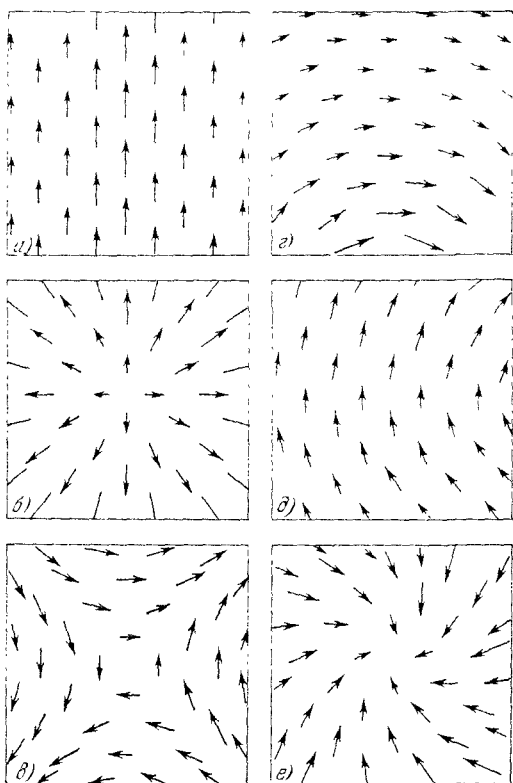


Рис. 2.32. Дивергенция четырех из этих векторных полей равна нулю в показанной области. Ротор трех из них равен нулю. Можете вы указать эти поля?

Вы можете получить некоторое представление о подобных векторных функциях, изучая двумерные поля, изображенные на рис. 2.32. В четырех из этих случаев дивергенция векторной функции равна нулю во всей изображенной области. Попробуйте указать эти случаи. Наличие дивергенции означает конечный поток в окрестность точки или из нее. Это легко обнаружить на некоторых

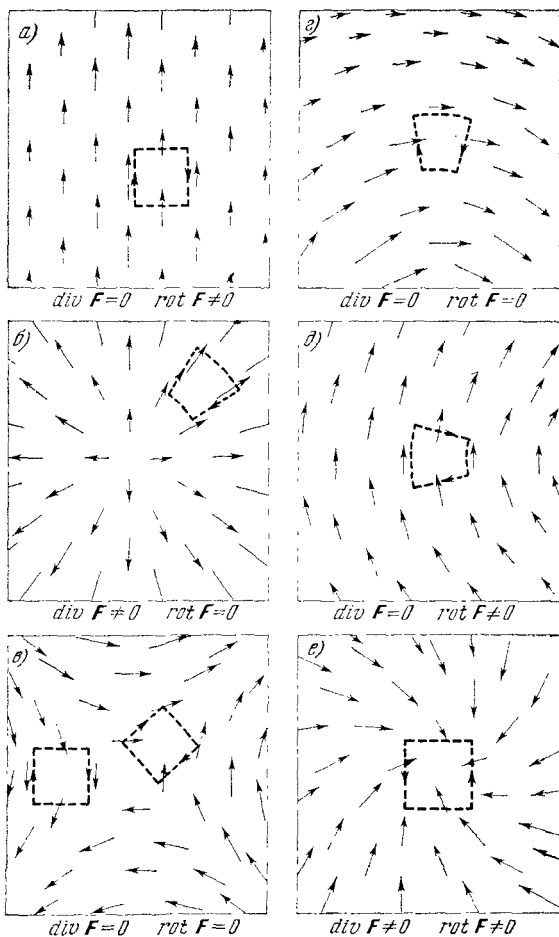


Рис. 2.33. Обсуждение рис. 2.32. а) Заметьте, что вектор остается постоянным, когда вы продвигаетесь в его направлении, т. е. $\partial F_x / \partial y = 0$, $F_x = 0$. Следовательно, $\text{div } \mathbf{F} = 0$. Обратите внимание на то, что линейный интеграл вдоль штрихового контура не равен нулю. б) Поле является центральным. Это значит, что функция F радиальна и что для данного r ее величина постоянна. Ротор любого центрального поля равен нулю; циркуляция равна нулю вокруг пунктирного и любого другого контура. Но дивергенция, очевидно, не равна нулю. в) Циркуляция, очевидно, могла бы быть равна нулю вокруг изображенных контуров. Действительно, это то же самое возможное электростатическое поле, как на рис. 2.2. Из одного этого рисунка не очевидно, что $\text{div } \mathbf{F} = 0$, но видно, что она также могла бы быть равна нулю. г) Заметьте, что, с точностью до первого порядка, здесь нет изменения в величине F , если вы продвигаетесь в направлении вектора F . Этого достаточно для того, чтобы дивергенция была равна нулю. Оказывается, что циркуляция могла бы быть равна нулю вокруг изображенного контура, так как F слабее на длинной стороне, чем на короткой. Действительно, это есть возможное электростатическое поле с F , пропорциональным $1/r$, где r — расстояние до точки, расположенной вне чертежа. д) По той же причине, что и выше, мы приходим к заключению, что $\text{div } \mathbf{F} = 0$. В данном примере величина F всюду одинакова, поэтому линейный интеграл по длинной стороне контура не уничтожается интегралом по короткому пути и циркуляция не равна нулю. е) Ясно, что циркуляция вокруг штрихового контура не равна нулю. Оказывается также, что и дивергенция не равна нулю, так как векторы сходятся к центру со всех сторон.

чертежах. На других сразу видно, что дивергенция равна нулю. На трех полях рис. 2.32 ротор векторной функции равен нулю в пределах изображенного участка поля. Попробуйте указать эти поля, решая для каждого чертежа, будет ли линейный интеграл вдоль любой петли равен нулю. В этом состоит сущность ротора. (После изучения чертежей продумайте эти вопросы, прежде чем сравнить ваши доказательства и выводы с объяснением, приведенным на рис. 2.33.)

Ротор векторного поля окажется ценным инструментом позже, когда мы будем заниматься электрическими и магнитными полями, ротор которых не равен нулю. Мы привели понятие ротора здесь, так как по идее оно очень близко к понятию дивергенции. Можно сказать, что они являются двумя видами производных векторного



Рис. 2.34. Некоторые векторные соотношения.

$$a) \int_{\text{по поверхности}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \int_{\text{по объему}} \operatorname{div} \mathbf{F} d\tau; \quad б) \int_{\text{по кривой}} \mathbf{A} ds = \int_{\text{по поверхности}} \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a};$$

$$в) \varphi_2 - \varphi_1 = \int_{\text{по кривой}} \operatorname{grad} \varphi \cdot d\mathbf{s}.$$

В декартовых координатах:

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \hat{x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = \nabla \times \mathbf{A},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{F}; \quad \nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z};$$

$$\operatorname{grad} \varphi = \hat{x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \nabla \varphi.$$

поля. Один вид, а именно дивергенция, подразумевает скорость изменения компоненты вектора в ее собственном направлении $\partial F_x / \partial x$ и т. д. Другой вид, т. е. ротор, представляет собой «боковую производную», включающую скорость изменения F_x вдоль осей y или z .

Соотношения, называемые теоремами Гаусса и Стокса, приведены на рис. 2.34. Связь между скалярной потенциальной функцией и линейным интегралом от градиента можно также считать членом этой семьи теорем, поэтому она также приводится на рисунке.

Задачи

2.1. Линейный интеграл и градиент (это поле изучается дальше в задачах 2.11 и 2.20). Следующая векторная функция дает возможное электростатическое поле:

$$E_x = 6xy; \quad E_y = 3x^2 - 3y^2; \quad E_z = 0.$$

Вычислите линейный интеграл от \mathbf{E} от точки $(0, 0, 0)$ до точки $(x_1, y_1, 0)$ вдоль пути, который идет прямо от $(0, 0, 0)$ до $(x_1, 0, 0)$ и оттуда в точку $(x_1, y_1, 0)$. Сделайте такое же вычисление для пути, который идет вдоль двух других сторон четырехугольника через точку $(0, y_1, 0)$. Вы должны получить одинаковые ответы, если вышеприведенное утверждение справедливо. Теперь у вас имеется потенциальная функция $\varphi(x, y, z)$. Найдите градиент этой функции и посмотрите, получите ли вы таким образом компоненты заданного поля.

2.2. Потенциал двух точечных зарядов. Рассмотрите систему двух зарядов, изображенную на рис. 2.6. Пусть ось z совпадает с линией, на которой расположены оба заряда, и пусть в точке $z=0$ находится положительный заряд. Постройте график потенциала φ на оси z , от $z=-5$ до $z=15$, измеряя φ в В/м, а z в сантиметрах.

2.3. Разность потенциалов концентрических сфер. Небольшая сфера радиусом r концентрична большой сфере радиусом R . По поверхностям сфер равномерно распределены заряды q и Q соответственно. Вычислите разность потенциалов сфер. Обратите внимание на то, что если заряд q положительный, то потенциал внутренней сферы будет всегда выше, чем потенциал наружной сферы. Таким образом, если сферы соединить проводом, то заряд q полностью перейдет на наружную сферу, независимо от величины заряда Q .

2.4. Потенциал заряженного стержня. Тонкий стержень имеет протяженность вдоль оси z от $z=-a$ до $z=a$. По стержню равномерно распределен заряд, равный λ ед. В/м на сантиметр длины стержня. Вычислите потенциал для всех точек на оси x при $x > 0$.

2.5. Параллельные заряженные слои. На каждой из трех бесконечно больших плоскостей $x=-a$, $x=0$ и $x=a$ находится поверхностный заряд σ , распределенный с равномерной плотностью. Определите электрическое поле и потенциал для всего пространства, принимая $\varphi=0$ в точке $x=0$.

2.6. Цилиндрическое распределение заряда. Для цилиндра с равномерной плотностью заряда (рис. 2.20):

а) Покажите, что выражение, приведенное на рисунке для поля внутри цилиндра, следует из закона Гаусса.

б) Определите потенциал φ как функцию r внутри и снаружи цилиндра.

в) Нарисуйте график φ как функцию r . Какова природа особенности в точке $r=a$?

2.7. Потенциал слоя с объемной плотностью заряда. Пространство между плоскостями $y=0$ и $y=b$ заполнено зарядом с объемной плотностью ρ , и никаких других зарядов нет. Определите электрическое поле всюду в этой системе, а также потенциальную функцию φ для этого поля и покажите, что она всюду удовлетворяет уравнению Пуассона.

2.8. Эквипотенциальные поверхности в поле заряженного диска. Начертите для системы на рис. 2.7 эквипотенциальную поверхность, касающуюся края диска. Определите точку, в которой эта поверхность пересекает ось симметрии.

2.9. Энергия системы зарядов, выраженная через потенциалы. Примерно так же мы вычисляли энергию подобных систем в гл. 1. Примените уравнение (2.42) для определения энергии, требуемой для помещения четырех электронов по углам тетраэдра со стороной, равной 1 \AA , в центре которого находится протон. Что вы можете сказать о результирующей силе, действующей на один из электронов, если известен знак энергии.

2.10. Две одинаковые сферы радиусом r разделены расстоянием $d \gg r$. Заряд Q распределен по поверхности сфер.

а) Определите потенциальную энергию системы, если на каждую сферу поместить заряд $Q/2$.

б) Определите потенциальную энергию, если весь заряд распределен по поверхности одной сферы, а на другой его нет.

в) Определите электрические потенциалы на каждой сфере в случаях а) и б).

г) Если соединить сферы в случае б) тонким проводом так, чтобы заряд мог перетекать от одной сферы к другой, то какова будет окончательная конфигурация заряда? Что можно сказать о сохранении энергии?

2.11. Вычислите компоненты $\nabla \times \mathbf{E}$ и покажите, что векторная функция, определенная в задаче 2.1, является возможным электростатическим полем. Решив задачу 2.1, вы доказали это другим способом, определив скалярную функцию, градиентом которой является поле. Вычислите величину дивергенции поля.

2.12. Удовлетворяет ли функция $f(x, y) = x^2 + y^2$ двумерному уравнению Лапласа? А функция $g(x, y) = x^2 - y^2$? Постройте график последней функции, вычислите градиенты в точках $(x=0, y=1)$; $(x=1, y=0)$; $(x=0, y=-1)$; $(x=-1, y=0)$ и покажите стрелками направления векторов этих градиентов.

2.13. Простой пример на ротор и теорему Стокса. Начертите «силовые линии» для векторной функции $\mathbf{A} = -\hat{y}x + \hat{x}y$ в плоскости xy . Вычислите $\text{rot } \mathbf{A}$ и изобразите вектор, указывающий его направление. Вычислите линейный интеграл $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ по замкнутой кривой $x^2 + y^2 = 1$; $z = 0$. Покажите, что теорема Стокса справедлива, вычислив поверхностный интеграл от $\nabla \times \mathbf{A}$ по поверхности, охватываемой этой кривой.

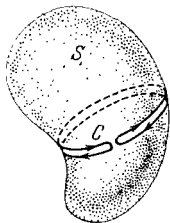
2.14. Вычислите ротор и дивергенцию каждого из следующих векторных полей; если ротор окажется равным нулю, попробуйте определить скалярную функцию ϕ , градиент которой дает векторное поле:

а) $F_x = x + y$; $F_y = -x + y$; $F_z = -2z$.

б) $G_x = 2y$; $G_y = 2x + 3z$; $G_z = 3y$.

в) $H_x = x^2 - z^2$; $H_y = 2$; $H_z = 2xz$.

2.15. Важная теорема векторного анализа. Если \mathbf{A} является векторным полем с непрерывными производными, то $\text{div}(\text{rot } \mathbf{A}) = 0$, или, пользуясь обозначением «набла», $\nabla(\nabla \times \mathbf{A}) = 0$. Нам эта теорема понадобится позже. Целью данной задачи является ее доказательство. Ниже указаны два различных способа, с помощью которых эта цель может быть достигнута.



К задаче 2.15.

а) Непосредственное вычисление в определенной системе координат. Воспользуйтесь выражением для ∇ в декартовых координатах.

б) Применение теоремы Гаусса и теоремы Стокса не требует определенной системы координат. Рассмотрим поверхность S , изображенную на рисунке, а именно баллон, почти перерезанный на две части и окруженный замкнутой кривой C . Возьмите линейный интеграл по кривой, подобной C , от любого векторного поля, затем примените теоремы Стокса и Гаусса.

2.16. Примеры векторных полей скоростей с определенным видом симметрии: аксиальная симметрия и скорость направления по касательной к окружности. Пусть векторная функция $\mathbf{v}(x, y, z)$ дает скорость жидкости в любой точке. Жидкость предполагается несжимаемой, т. е. всюду имеет одинаковую плотность. Это означает, что скорость переноса вещества через любую площадь, заданную небольшой рамкой, закрепленной в пространстве, будет пропорциональна \mathbf{v} . Если скорость \mathbf{v} постоянна во времени в любой точке и если свойства вещества не изменяются, то $\text{div } \mathbf{v}$ должна быть всюду равна нулю. Почему? Перейдем к изучению свойств $\text{rot } \mathbf{v}$. Рассмотрим определенное семейство независимых от времени течений, которые симметричны относительно какой-то оси, а \mathbf{v} всегда направлена по окружности. Следовательно, в любой точке \mathbf{v} представляет собой вектор, перпендикулярный к плоскости, содержащей эту точку и ось. Для аксиальной симметрии целесообразно выбрать систему цилиндрических полярных координат z, r и ϕ . Примем в качестве дальнейшего ограничения, что \mathbf{v} зависит только от r . Тогда

любое течение этого типа можно описать функцией $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{r}}v(r)$, где $\hat{\mathbf{r}}$ является единичным вектором, перпендикулярным к $\hat{\mathbf{r}}$ и к $\hat{\mathbf{z}}$. Исходя из фундаментального определения ротора \mathbf{v} через линейный интеграл вдоль небольшого участка, покажите, что для полей с такой особой симметрией ротор \mathbf{v} выражается просто уравнением $\text{rot } \mathbf{v} = \hat{\mathbf{z}} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv(r))$. Воспользуйтесь этим выражением для изучения следующих специальных случаев, соответствующих определенным функциям $v(r)$.

а) Жидкость движется подобно твердому телу, вращаясь вокруг оси с угловой скоростью ω . Определите для этого случая $\text{rot } \mathbf{v}$.

б) Жидкость движется так, что $\text{rot } \mathbf{v} = 0$. Может ли это быть справедливым всюду? Чему равна функция $v(r)$? Попробуйте изобразить такое течение на чертеже.

в) Жидкость движется таким образом, что $v(r)$ подчиняется третьему закону Кеплера для кругового планетарного движения. Определите ротор \mathbf{v} . Может ли это движение быть подобным движению колец Сатурна?

2.17. Вывод общей формулы для энергии, запасенной в электрическом поле. Мы сформулировали уравнение (36) и эквивалентное ему уравнение (39) без доказательства. Попытаемся доказать, что уравнение (39) следует из уравнения (43). Вы сможете сделать это пользуясь следующим:

- 1) тождеством $\nabla \cdot (f \nabla f) = (\nabla f)^2 + f \nabla^2 f$, которое нетрудно доказать;
- 2) уравнением Пуассона;
- 3) теоремой Гаусса.