тельно, линейный интеграл от поля $\mathbf{E}$, т. е. полного поля, созданного всеми источниками, не должен зависеть от пути:

$$\boxed{\begin{gathered}\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} \text{ имеет одинаковую величину для любого} \\ \text{пути, соединяющего точки } P_1 \text{ и } P_2 \\ \text{в электростатическом поле.}\end{gathered}} \tag{6}$$

В качестве примера рассмотрим линейный интеграл от A до C на рис. 2.2, *в* по пути через точку (2,0) в рассмотренном выше поле $\mathbf{E}$.

На первом отрезке пути вдоль оси x, между началом координат и $x=2$, поле перпендикулярно к пути, следовательно, произведение $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$ равно нулю. На втором отрезке пути $E_y=Kx=2K$ и длина этого отрезка составляет 2 единицы. Таким образом, величина линейного интеграла равна $4K$, что совпадает со значением, полученным выше. Если нам известно, что линейный интеграл не должен зависеть от пути, было бы неразумно вычислять его для такого пути, как ABC. На практике не часто требуется вычислять величины линейных интегралов. Главная цель примера дать ясное представление о том, что означает линейный интеграл.

2.2. Разность потенциалов и потенциальная функция

Поскольку линейный интеграл в электростатическом поле не зависит от пути, мы можем использовать его для определения скалярной величины φ_{21}:

$$\boxed{\varphi_{21} = -\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}.} \tag{7}$$

Величина φ_{21} имеет смысл *работы*, затраченной на перенос *единицы положительного заряда* в поле $\mathbf{E}$ из точки P_1 в P_2. Таким образом, φ_{21} представляет собой однозначно определенную скалярную функцию двух точек P_1 и P_2, называемую электрической *разностью потенциалов* между двумя точками.

В системе единиц СГС разность потенциалов измеряется в *эрг*/ед. СГСЭ$_q$. Эта единица имеет свое собственное название, *стат-вольт* («стат» происходит от слова «электростатический»), и обозначается «единица СГСЭ$_V$». *Вольт* — это единица разности потенциалов в системе МКС*). Он эквивалентен 1/299,79, т. е. приблизительно

*) Вольт, так же как кулон, ампер и ом, применялся в качестве «практической» единицы задолго до того, как была построена полная система электрических единиц МКС.

1/300 ед. СГСЭ$_V$. Для перенесения заряда в один кулон из одной точки в другую, разность потенциалов между которыми составляет один вольт, требуется работа, равная одному джоулю.

Предположим, что положение точки P_1 фиксировано. Тогда разность потенциалов φ_{21} будет зависеть только от положения точки P_2, т. е. от пространственных координат x, y, z. Мы можем обозначить эту функцию просто через $\varphi(x, y, z)$ без индексов, помня, что ее определение связано с вышеупомянутой точкой P_1. Мы говорим, что функция φ является потенциалом векторного поля $\mathbf{E}$. Она представляет собой скалярную функцию положения, или скалярное поле (это одно и то же). Величина φ в данной точке является просто числом (в единицах работы на единицу заряда), с которым не связано никакое направление. Если задано векторное поле $\mathbf{E}$, то потенциальная функция φ определена с точностью до произвольной аддитивной постоянной, появляющейся благодаря произвольности выбора P_1.

В качестве примера определим потенциал электрического поля, изображенного на рис. 2.2. Точку P_1 удобно расположить в начале координат, обозначенном на рис. 2.2 буквой A. Чтобы вычислить интеграл

$$\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} \tag{8}$$

от этой точки до любой точки (x, y), удобно воспользоваться наиболее легким путем, обозначенным на рис. 2.2, *в* пунктиром:

$$\varphi(x, y) = -\int\limits_{(0,\ 0)}^{(x,\ y)} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\int\limits_{(0,\ 0)}^{(x,\ 0)} E_x\,dx - \int\limits_{(x,\ 0)}^{(x,\ y)} E_y\,dy. \tag{9}$$

Первый интеграл равен нулю, как уже было отмечено, так как в этом поле компонента E_x равна нулю вдоль оси x. Второе интегрирование проводится при постоянном x, и так как $E_y = Kx$, то интеграл будет иметь вид

$$-Kx\int\limits_0^y dy, \tag{10}$$

а величина его будет равна $-Kxy$. Для такого поля, следовательно, потенциал равен

$$\varphi = -Kxy. \tag{11}$$

К этому выражению можно прибавить любую постоянную. Это будет означать только то, что точка, в которой потенциал считается равным нулю, перенесена в другое место.

Мы должны быть осторожны и не перепутать *потенциал* φ данного поля $\mathbf{E}$ с *потенциальной энергией* системы зарядов. Потенциальная энергия системы зарядов является полной работой, затраченной на создание этой системы. Уравнение (1.8), например, дает U, потенциальную энергию системы зарядов, изображенной на рис. 1.6.

Электрический потенциал $\varphi(x, y, z)$ поля, показанного на рисунке, представляет собой работу, приходящуюся на единицу заряда, которая требуется для переноса единичного положительного пробного заряда из бесконечности в точку (x, y, z) в поле этой системы из восьми зарядов.

2.3. Градиент скалярной функции

При заданном электрическом поле мы можем определить электрическую потенциальную функцию. Обратно, зная потенциал, можно определить поле. Из уравнения (7) следует, что поле является в некотором смысле *производной* от потенциальной функции. Для уточнения этой идеи вводится понятие *градиента* скалярной функции координат.

Пусть $f(x, y, z)$ является некоторой непрерывной дифференцируемой функцией координат. Зная ее частные производные $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ и $\partial f/\partial z$, в каждой точке пространства можно построить вектор, компоненты которого x, y, z равны соответствующим частным производным *). Этот вектор называется градиентом f и обозначается символом $\operatorname{grad} f$ или ∇f:

$$\boxed{\nabla f = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial f}{\partial z}\,.} \tag{12}$$

∇f является вектором, который определяет изменение функции f в окрестности точки. x-компонентой этого вектора является частная производная от f по x, т. е. мера скорости изменения f в направлении оси x.

Направление вектора ∇f в любой точке является направлением, в котором следует двигаться от этой точки для наиболее быстрого увеличения функции f. Предположим, что мы имеем дело с функцией только двух переменных x и y, так что она может быть представлена поверхностью в трехмерной системе координат.

Стоя в некоторой точке на этой поверхности, мы видим, что она в одних направлениях поднимается, а в других, противоположных, опускается. В одном из направлений за один короткий шаг мы поднимаемся выше, чем за шаг такой же длины в любом другом

---

*) Напоминаем читателю, что частная производная по x от $f(x, y, z)$, обозначаемая через $\partial f/\partial x$, представляет собой скорость изменения функции при изменении x, при постоянных значениях других переменных y и z. Более точно,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}.$$

Например, если $f = x^2yz^3$, то

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xyz^3, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2z^3, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 3x^2yz^2.$$