Электрический потенциал $\varphi(x, y, z)$ поля, показанного на рисунке, представляет собой работу, приходящуюся на единицу заряда, которая требуется для переноса единичного положительного пробного заряда из бесконечности в точку (x, y, z) в поле этой системы из восьми зарядов.

2.3. Градиент скалярной функции

При заданном электрическом поле мы можем определить электрическую потенциальную функцию. Обратно, зная потенциал, можно определить поле. Из уравнения (7) следует, что поле является в некотором смысле *производной* от потенциальной функции. Для уточнения этой идеи вводится понятие *градиента* скалярной функции координат.

Пусть $f(x, y, z)$ является некоторой непрерывной дифференцируемой функцией координат. Зная ее частные производные $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ и $\partial f/\partial z$, в каждой точке пространства можно построить вектор, компоненты которого x, y, z равны соответствующим частным производным *). Этот вектор называется градиентом f и обозначается символом $\mathrm{grad}\, f$ или ∇f:

$$\boxed{\nabla f = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial f}{\partial z}.} \qquad (12)$$

∇f является вектором, который определяет изменение функции f в окрестности точки. x-компонентой этого вектора является частная производная от f по x, т. е. мера скорости изменения f в направлении оси x.

Направление вектора ∇f в любой точке является направлением, в котором следует двигаться от этой точки для наиболее быстрого увеличения функции f. Предположим, что мы имеем дело с функцией только двух переменных x и y, так что она может быть представлена поверхностью в трехмерной системе координат.

Стоя в некоторой точке на этой поверхности, мы видим, что она в одних направлениях поднимается, а в других, противоположных, опускается. В одном из направлений за один короткий шаг мы поднимаемся выше, чем за шаг такой же длины в любом другом

---

*) Напоминаем читателю, что частная производная по x от $f(x, y, z)$, обозначаемая через $\partial f/\partial x$, представляет собой скорость изменения функции при изменении x, при постоянных значениях других переменных y и z. Более точно,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}.$$

Например, если $f = x^2yz^3$, то

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xyz^3, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2z^3, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 3x^2yz^2.$$

направлении. Градиент функции — это вектор, совпадающий по направлению с наибольшей крутизной, величина которого равна наклону, измеренному в этом направлении.

Рис. 2.3 поможет вам понять это определение. Представим себе некоторую определенную функцию двух координат x и y, изображенную в виде поверхности $f(x, y)$ на рис. 2.3, *а*. В точке (x_1, y_1) поверхность поднимается наиболее круто в направлении, составляющем угол примерно 80° с положительным направлением оси x. Градиент ∇f функции $f(x, y)$, является векторной функцией x и y. Характер распределения градиента показан на рис. 2.3, *б* некоторым количеством векторов в разных точках двумерного пространства, включающего точку $(x_1 y_1)$. Векторная функция ∇f, определенная уравнением (12), является просто распространением этой идеи на трехмерное пространство. (Будьте осторожны и не перепутайте рис. 2.3, *а* с изображением трехмерного пространства x, y, z; третья координата на этом рисунке представляет собой величину функции $f(x, y)$).

В качестве примера функции в трехмерном пространстве пред-

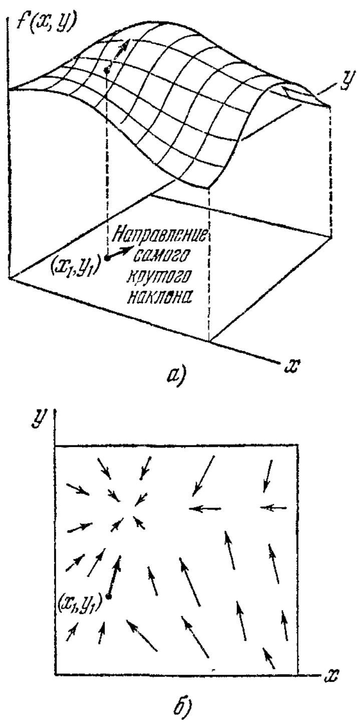

Рис. 2.3. Скалярная функция $f(x, y)$ представлена поверхностью (*а*). Стрелки изображают векторную функцию grad$f$ (*б*).

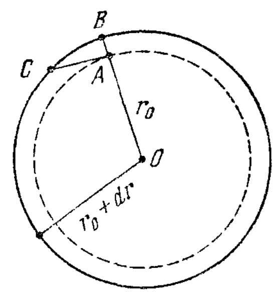

Рис. 2.4. Самый короткий путь для данного изменения функции f — это радиальный путь AB, если f зависит только от r.

ставим себе, что f зависит только от r, где r — расстояние до некоторой фиксированной точки O. На сфере с радиусом r_0, с центром в точке O, $f = f(r_0)$ является величиной постоянной. На сфере с несколько бóльшим радиусом $r_0 + dr$ эта функция также постоянна и равна $f(r_0 + dr)$. Если мы хотим изменить значение функции от $f(r_0)$ до $f(r_0 + dr)$, то кратчайший путь, которым мы можем этого достигнуть, совпадает с радиусом (отрезок AB, но не AC (рис. 2.4)). «Наклон» f является, таким образом, наибольшим в радиальном направлении, так что ∇f в любой точке есть вектор, совпадающий с радиусом. Действительно, в данном случае $\nabla f = \hat{\mathbf{r}}\,(\partial f/\partial r)$, где $\hat{\mathbf{r}}$ для любой точки обозначает единичный вектор в радиальном направлении.

2.4. Получение поля из потенциала

Теперь легко убедиться, что скалярная функция f так же связана с векторной функцией ∇f, как и потенциал φ с полем $\mathbf{E}$, если не считать знака минус. Рассмотрим величину φ в двух близких точках (x, y, z) и $(x+dx,\ y+dy,\ z+dz)$. Изменение φ при переходе из первой точки во вторую имеет следующий вид:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz. \tag{13}$$

С другой стороны, из определения φ это изменение можно выразить также следующим образом:

$$d\varphi = -\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}. \tag{14}$$

Бесконечно малое смещение вектора $d\mathbf{s}$ равно $\hat{\mathbf{x}}\,dx + \hat{\mathbf{y}}\,dy + \hat{\mathbf{z}}\,dz$. Таким образом, если мы отождествим $\mathbf{E}$ с $-\nabla\varphi$, то уравнения (13) и (14) окажутся одинаковыми. Итак, электрическое поле равно отрицательному значению градиента потенциала:

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla\varphi.} \tag{15}$$

Знак минус показывает, что электрическое поле направлено из области положительного потенциала в область отрицательного потенциала. Направление вектора $\nabla\varphi$ указывает направление увеличения φ. Для разъяснения вернемся к примеру поля на рис. 2.2. Пользуясь значением потенциала, полученным из уравнения (11), $\varphi = -Kxy$, можно восстановить вид электрического поля, с которого мы начали:

$$\mathbf{E} = -\nabla(-Kxy) = -\left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y}\right)(-Kxy) = K(\hat{\mathbf{x}}y + \hat{\mathbf{y}}x). \tag{16}$$

2.5. Потенциалы распределения заряда, двух точечных зарядов и длинного заряженного провода

Потенциал распределения заряда. Нам известно значение потенциала, связанного с единичным точечным зарядом. Действительно, уравнение (3) гл. 1 позволяет вычислить работу, требуемую для переноса одного заряда в окрестность другого. Потенциал в любой точке поля изолированного точечного заряда q равен q/r, где r — расстояние от этой точки до источника q, если потенциал точек в бесконечности принять равным нулю. Потенциалы, так же как и поля, подчиняются принципу суперпозиции. При