клон» f является, таким образом, наибольшим в радиальном направлении, так что ∇f в любой точке есть вектор, совпадающий с радиусом. Действительно, в данном случае $\nabla f = \hat{\mathbf{r}}\,(\partial f/\partial r)$, где $\hat{\mathbf{r}}$ для любой точки обозначает единичный вектор в радиальном направлении.

2.4. Получение поля из потенциала

Теперь легко убедиться, что скалярная функция f так же связана с векторной функцией ∇f, как и потенциал φ с полем $\mathbf{E}$, если не считать знака минус. Рассмотрим величину φ в двух близких точках (x, y, z) и $(x+dx, y+dy, z+dz)$. Изменение φ при переходе из первой точки во вторую имеет следующий вид:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz. \tag{13}$$

С другой стороны, из определения φ это изменение можно выразить также следующим образом:

$$d\varphi = -\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}. \tag{14}$$

Бесконечно малое смещение вектора $d\mathbf{s}$ равно $\hat{\mathbf{x}}\,dx + \hat{\mathbf{y}}\,dy + \hat{\mathbf{z}}\,dz$. Таким образом, если мы отождествим $\mathbf{E}$ с $-\nabla\varphi$, то уравнения (13) и (14) окажутся одинаковыми. Итак, электрическое поле равно отрицательному значению градиента потенциала:

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla\varphi.} \tag{15}$$

Знак минус показывает, что электрическое поле направлено из области положительного потенциала в область отрицательного потенциала. Направление вектора $\nabla\varphi$ указывает направление увеличения φ. Для разъяснения вернемся к примеру поля на рис. 2.2. Пользуясь значением потенциала, полученным из уравнения (11), $\varphi = -Kxy$, можно восстановить вид электрического поля, с которого мы начали:

$$\mathbf{E} = -\nabla(-Kxy) = -\left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y}\right)(-Kxy) = K(\hat{\mathbf{x}}y + \hat{\mathbf{y}}x). \tag{16}$$

2.5. Потенциалы распределения заряда, двух точечных зарядов и длинного заряженного провода

Потенциал распределения заряда. Нам известно значение потенциала, связанного с единичным точечным зарядом. Действительно, уравнение (3) гл. 1 позволяет вычислить работу, требуемую для переноса одного заряда в окрестность другого. Потенциал в любой точке поля изолированного точечного заряда q равен q/r, где r — расстояние от этой точки до источника q, если потенциал точек в бесконечности принять равным нулю. Потенциалы, так же как и поля, подчиняются принципу суперпозиции. При наличии нескольких источников потенциальная функция является просто суммой потенциальных функций, относящихся к каждому из источников в отдельности, при том условии, что мы задаемся единым нулевым потенциалом. Когда все источники расположены в некоторой конечной области, это всегда возможно и обычно простейшим условием является выбор нулевого потенциала в бесконечности. Придерживаясь такого правила, мы можем выразить потенциал любого распределения заряда интегралом:

$$\varphi(x,\ y,\ z) = \int\limits_{\substack{\text{по всем}\\ \text{источникам}}} \frac{\rho(x',\ y',\ z')\,dx'\,dy'\,dz'}{r}, \tag{17}$$

где r — расстояние от элемента объема $dx'\,dy'\,dz'$ до точки $(x,\ y,\ z)$, в которой вычисляется потенциал (рис. 2.5). Таким образом, $r = [(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2}$. Обратите внимание на различие

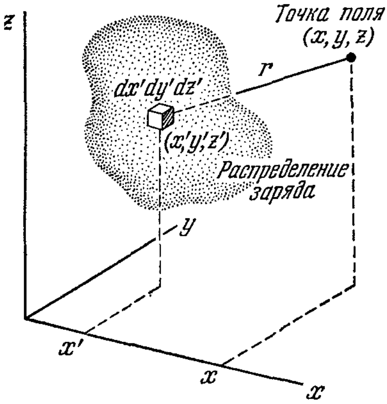

Рис. 2.5. Каждый элемент распределения заряда $\rho(x',\ y',\ z')$ вносит вклад в потенциал φ в точке $(x,\ y,\ z)$. Потенциал в этой точке является суммой всех таких вкладов (уравнение (17)).

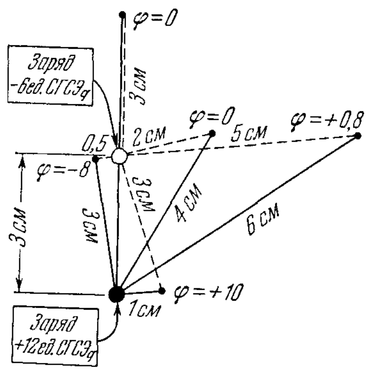

Рис. 2.6. Электрический потенциал φ в различных точках системы из двух точечных зарядов, φ стремится к нулю на бесконечно большом расстоянии. Заряд выражен в единицах СГСЭ$_q$, потенциал φ выражен в единицах СГСЭ$_V$, или в эргах на единицу заряда.

между этим выражением и интегралом, дающим электрическое поле распределения заряда (уравнение (1.15)). Здесь мы имеем в знаменателе r, а не r^2 и интеграл является скалярной величиной, а не векторной. Из скалярной потенциальной функции $\varphi\ (x,\ y,\ z)$ мы всегда можем получить электрическое поле, образовав отрицательный градиент φ, согласно уравнению (15).

Потенциал двух точечных зарядов. Рассмотрим очень простой пример — потенциал двух точечных зарядов, показанных на рис. 2.6. Положительный заряд 12 ед. СГСЭ$_q$ расположен в 3 *см* от отрицательного заряда, равного —6 ед. СГСЭ$_q$. Потенциал в любой точке пространства равен сумме потенциалов, созданных каждым зарядом в отдельности. Потенциалы для некоторых выбранных в пространстве точек приведены на рисунке. Здесь имеет место не векторное, а алгебраическое сложение скалярных величин. Например, в далекой точке, расположенной справа, расстояние которой от положительного заряда равно 6 *см*, а от отрицательного 5 *см*, потенциал равен $(+{}^{12}/_{6})+(-{}^{6}/_{5})=+0{,}8$. Он выражается в данном случае в единицах СГСЭ$_q$/*см*, что то же самое, что и *эрг*/ед. СГСЭ$_q$ или ед. СГСЭ$_V$. На бесконечности значение потенциала стремится к нулю. Для переноса единичного положительного заряда из бесконечности в точку с $\varphi=0{,}8$ ед. СГСЭ$_V$ потребовалась бы работа, равная 0,8 *эрг*. Заметьте, что две точки на рисунке имеют $\varphi=0$. Конечная работа, затраченная на перенесение любого заряда из бесконечности в одну из этих точек, будет равна нулю. Можно убедиться, что существует бесконечно большое количество таких точек и что они образуют в пространстве поверхность, охватывающую отрицательный заряд. Геометрическим местом точек с определенным значением φ является поверхность. Она называется *эквипотенциальной поверхностью*. На плоском чертеже она изображается кривой.

Потенциал длинного заряженного провода. Применение уравнения (17) не всегда возможно: оно справедливо только в тех случаях, когда все источники расположены в некоторой конечной области пространства. Простым примером затруднений, возникающих в случае бесконечного распределения зарядов, является случай длинного заряженного провода, поле **E** которого изучалось нами в разделе 1.12. Если мы примем потенциалы далеких точек в такой системе равными нулю и выполним интегрирование по распределению заряда, приведенному в уравнении (15), то мы обнаружим, что интеграл расходится — мы получим бесконечно большой результат. Этого следовало ожидать, так как в данном случае «бесконечность» (т. е. пространство, очень далекое от области, в которой мы хотим определить потенциальную функцию) включает не только точки, удаленные от провода, но и большую часть самого провода! При определении электрического поля бесконечно длинного провода такой трудности не возникало, так как вклады элементов линейного заряда в поле быстро уменьшаются с увеличением расстояния. Очевидно, что в системе зарядов, распределенных до бесконечности, лучше расположить нулевой потенциал где-нибудь поближе. Тогда останется только вычислить разность потенциалов φ_{21} между любой точкой (x, y, z) и выбранной точкой, пользуясь фундаментальным соотношением (7).

Вернемся к примеру бесконечно длинного заряженного провода, расположим произвольно вышеупомянутую точку P_1 на расстоянии r_1 от провода. Тогда для перенесения единицы заряда из точки P_1 в точку P_2, расположенную на расстоянии r_2, требуется работа:

$$\varphi_{21}=-\int_{P_1}^{P_2}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}=-\int_{r_1}^{r_2}\left(\frac{2\lambda}{r}\right)dr=-2\lambda\ln r_2+2\lambda\ln r_1. \qquad (18)$$

Это выражение показывает, что электрический потенциал поля заряженного провода имеет вид

$$\varphi = -2\lambda \ln r + \text{const}. \qquad (19)$$

Постоянная $2\lambda \ln r_1$ не играет роли, когда мы вычисляем $-\text{grad}\,\varphi$, чтобы получить поле $\mathbf{E}$. В этом случае

$$-\nabla\varphi = -\hat{\mathbf{r}}\frac{d\varphi}{dr} = \frac{2\lambda\hat{\mathbf{r}}}{r}. \qquad (20)$$

2.6. Равномерно заряженный диск

Рассмотрим в качестве конкретного примера электрический потенциал и поле вблизи равномерно заряженного диска. Это распределение заряда похоже на рассмотренное в разделе 1.13, но в отличие от него ограничено. Плоский диск радиусом a на рис. 2.7 заряжен положительно, причем заряд распределен по его поверхности с постоянной плотностью σ, в ед. СГСЭ$_q$/*см*^{2}. (Это — одинарный слой заряда бесконечно малой толщины, а не два слоя по обеим сторонам диска. Следовательно, полный заряд системы равен $\pi a^2\sigma$.) В дальнейшем мы часто будем иметь дело с поверхностными распределениями заряда, особенно на металлических проводниках. Однако рассматриваемый объект не является проводником; если бы он был им, то, как мы скоро увидим, заряд не мог бы оставаться равномерно распределенным, а перераспределился бы, концентрируясь у края диска. Наш диск сделан из изолятора, например из пластмассы, по которому заряд «распылен» таким образом, что каждый квадратный сантиметр диска удерживает одинаковое количество заряда.

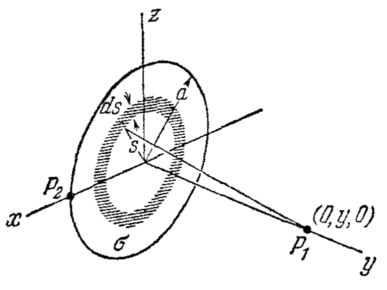

Рис. 2.7. Определение потенциала в точке P_1 на оси равномерно заряженного диска.

Вначале определим потенциал в некоторой точке P_1 на оси симметрии, в нашем случае на оси y. Все элементы заряда в тонком кольцевом сегменте диска расположены на одинаковом расстоянии от точки P_1. Если s обозначает радиус такого кольцевого сегмента, а ds — его ширину, то площадь сегмента равна $2\pi s ds$. Расположенное в нем количество заряда dq равно, следовательно, $dq = \sigma 2\pi s ds$. Все элементы такого кольца находятся на одинаковом расстоянии от точки P_1, а именно $r = \sqrt{y^2+s^2}$, так что вклад кольца в потенциал в точке P_1 равен dq/r, или $2\pi\sigma s\, ds/\sqrt{y^2+s^2}$. Чтобы определить потенциал, обусловленный целым диском, следует взять интеграл по всем таким кольцам:

$$\varphi(0,\ y,\ 0) = \int \frac{dq}{r} = \int \frac{2\pi\sigma s\, ds}{\sqrt{y^2+s^2}} = 2\pi\sigma\left[\sqrt{y^2+s^2}\right]_{s=0}^{s=a}. \qquad (21)$$

Интеграл оказался элементарным; при подстановке $u = y^2+s^2$ он