

заряженного провода имеет вид

$$\varphi = -2\lambda \ln r + \text{const.} \quad (19)$$

Постоянная  $2\lambda \ln r_1$  не играет роли, когда мы вычисляем  $-\text{grad } \varphi$ , чтобы получить поле  $\mathbf{E}$ . В этом случае

$$-\nabla\varphi = -\hat{\mathbf{r}} \frac{d\varphi}{dr} = \frac{2\lambda\hat{\mathbf{r}}}{r}. \quad (20)$$

## 2.6. Равномерно заряженный диск

Рассмотрим в качестве конкретного примера электрический потенциал и поле вблизи равномерно заряженного диска. Это распределение заряда похоже на рассмотренное в разделе 1.13, но в отличие от него ограничено. Плоский диск радиусом  $a$  на рис. 2.7 заряжен положительно, причем заряд распределен по его поверхности с постоянной плотностью  $\sigma$ , в ед. СГСЭ  $q/\text{см}^2$ .

(Это — одиночный слой заряда бесконечно малой толщины, а не два слоя по обеим сторонам диска. Следовательно, полный заряд системы равен  $\pi a^2 \sigma$ .) В дальнейшем мы часто будем иметь дело с поверхностными распределениями заряда, особенно на металлических проводниках. Однако рассматриваемый объект не является проводником; если бы он был им, то, как

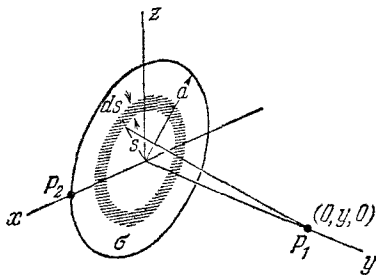


Рис. 2.7. Определение потенциала в точке  $P_1$  на оси равномерно заряженного диска.

мы скоро увидим, заряд не мог бы оставаться равномерно распределенным, а перераспределился бы, концентрируясь у края диска. Наш диск сделан из изолятора, например из пластмассы, по которому заряд «распылен» таким образом, что каждый квадратный сантиметр диска удерживает одинаковое количество заряда.

Вначале определим потенциал в некоторой точке  $P_1$  на оси симметрии, в нашем случае на оси  $y$ . Все элементы заряда в тонком кольцевом сегменте диска расположены на одинаковом расстоянии от точки  $P_1$ . Если  $s$  обозначает радиус такого кольцевого сегмента, а  $ds$  — его ширину, то площадь сегмента равна  $2\pi s ds$ . Расположенное в нем количество заряда  $dq$  равно, следовательно,  $dq = \sigma 2\pi s ds$ . Все элементы такого кольца находятся на одинаковом расстоянии от точки  $P_1$ , а именно  $r = \sqrt{y^2 + s^2}$ , так что вклад кольца в потенциал в точке  $P_1$  равен  $dq/r$ , или  $2\pi\sigma s ds / \sqrt{y^2 + s^2}$ . Чтобы определить потенциал, обусловленный целым диском, следует взять интеграл по всем таким кольцам:

$$\varphi(0, y, 0) = \int \frac{dq}{r} = \int \frac{2\pi\sigma s ds}{\sqrt{y^2 + s^2}} = 2\pi\sigma [\sqrt{y^2 + s^2}]_{s=0}^{s=a}. \quad (21)$$

Интеграл оказался элементарным; при подстановке  $u = y^2 + s^2$  он

принимает вид  $\int u^{-1/2} du$ . Подставляя пределы, получим

$$\varphi(0, y, 0) = 2\pi\sigma [\sqrt{y^2 + a^2} - y] \quad \text{для } y > 0. \quad (22)$$

Последнее утверждение требует объяснения. Результат, записанный в уравнении (22), справедлив для всех точек на положительном направлении оси  $y$ . Из физической симметрии системы (между сторонами диска никакого различия нет) очевидно, что значение потенциала должно быть одинаковым для отрицательного и положительного направлений оси  $y$ ; это отражено в уравнении (21), куда входит только  $y^2$ . Но при написании (22) мы выбрали знак, вычисляя квадратный корень из  $y^2$ , в результате чего это уравнение справедливо только для положительного  $y$ . Точное выражение для  $y < 0$  получается при другом выборе корня и равно

$$\varphi(0, y, 0) = 2\pi\sigma [\sqrt{y^2 + a^2} + y] \quad \text{для } y < 0. \quad (23)$$

Учитывая это обстоятельство, мы не должны удивляться, обнаружив особенность в  $\varphi(0, y, 0)$  при  $y=0$ . Действительно, наклон функции резко изменяется, как мы видим на рис. 2.8, где по оси  $\varphi$  отложены значения потенциала, являющегося функцией  $y$ . Потенциал в центре диска равен  $\varphi(0, 0, 0) = 2\pi\sigma a$ . Такое количество работы потребовалось бы для перенесения единичного положительного заряда из бесконечности в центр диска, причем любым путем. Поведение функции  $\varphi(0, y, 0)$  для очень больших значений  $y$  довольно интересно. Для  $y \gg a$  мы можем приблизительно записать выражение (22) следующим образом:

$$\sqrt{y^2 + a^2} - y = y \left[ \sqrt{1 + \frac{a^2}{y^2}} - 1 \right] = y \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{a^2}{y^2} \right) \dots - 1 \right] \approx \frac{a^2}{2y}. \quad (24)$$

Следовательно,

$$\varphi(0, y, 0) \approx \pi a^2 \sigma / y \quad \text{для } y \gg a. \quad (25)$$

Величина  $\pi a^2 \sigma$  равна полному заряду  $q$  диска, поэтому уравнение (25) представляет собой выражение для потенциала, созданного таким точечным зарядом. Как и следовало ожидать, форма заряда на значительном расстоянии от диска (по сравнению с его диаметром) не имеет большого значения; в первом приближении играет роль только полный заряд. На рис. 2.8 штриховой кривой изображена функция  $\pi a^2 \sigma / q$ , причем эта потенциальная функция у оси, как вы видите, довольно быстро приближается к своим асимптотам. По-

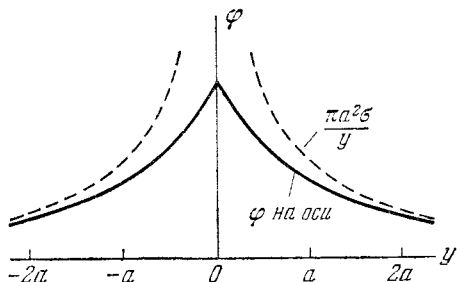


Рис. 2.8. График потенциала на оси. Пунктирная кривая представляет потенциал точечного заряда  $q = \pi a^2 \sigma$ .

лучить потенциал в общем виде для точек, расположенных на некотором расстоянии от оси симметрии, оказывается не просто, так как эта задача приводит к вычислению так называемого *эллиптического интеграла*. Такие функции хорошо известны и табулированы\*), но в данном курсе мы не имеем возможности заниматься математическими тонкостями. Ниже приведен достаточно простой пример, рассмотрение которого может быть поучительным. Определим потенциал в точке, расположенной на самом краю диска (точка  $P_2$  на рис. 2.9).

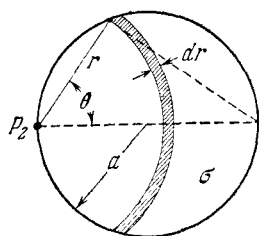


Рис. 2.9. Определение потенциала в точке  $P_2$  на краю равномерно заряженного диска.

Чтобы вычислить потенциал в точке  $P_2$ , рассмотрим сегмент кольца, центр которого совпадает с точкой  $P_2$ . Из рис. 2.9 видно, что заряд этого сегмента равен  $dq = \sigma r \theta dr$ . Его вклад в потенциал в точке  $P_2$  равен  $dq/r = 2\sigma \theta dr$ . Из прямоугольного треугольника (рис. 2.9)  $r = 2a \cos \theta$  и  $dr = -2a \sin \theta d\theta$ .

Следовательно, угол  $\theta$  можно использовать в качестве переменной интегрирования. Если пределы  $\theta$  менять от  $\pi/2$  до 0, то мы охватим весь диск. Таким образом,

$$\begin{aligned} \varphi &= \int \frac{dq}{r} = \int_{\pi/2}^0 2\sigma \theta (-2a \sin \theta d\theta) = \int_0^{\pi/2} 4\sigma a \theta \sin \theta d\theta = \\ &= 4\sigma a [\sin \theta - \theta \cos \theta]_0^{\pi/2} = 4\sigma a. \end{aligned} \quad (26)$$

(Интеграл  $\int \theta \sin \theta d\theta$  можно взять по частям.) Сравнивая эту величину с  $2\pi a \sigma$  — потенциалом в центре диска, — мы видим, как и следовало ожидать, что потенциал уменьшается от центра диска к краям. Следовательно, электрическое поле должно иметь компоненту в плоскости диска, направленную наружу. Вот почему, как отмечалось выше, свободный заряд будет перемещаться по направлению к краям. Иными словами, наш равномерно заряженный диск не является поверхностью постоянного потенциала, какой должна быть любая проводящая поверхность, чтобы заряд на ней покоился\*\*). Электрическое поле на оси симметрии можно вычислить непосредственно из потенциальной функции

$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{d}{dy} 2\pi \sigma \left[ \sqrt{y^2 + a^2} - y \right], \quad (27)$$

откуда

$$E_y = 2\pi \sigma \left[ 1 - \frac{y}{\sqrt{y^2 + a^2}} \right] \quad \text{при } y > 0. \quad (28)$$

\*) Эти функции упоминались в т. I в связи с точным рассмотрением простого маятника (см. т. I, гл. 7).

\*\*) В гл. 3 мы подробно рассмотрим вопрос о том, почему проводящие поверхности должны быть эквипотенциальными.

(Покажите, что компоненту  $E_y$  для точек на оси нетрудно вычислить непосредственно из распределения заряда.)

По мере приближения значения  $y$  с положительной стороны к нулю величина компоненты  $E_y$  приближается к  $2\pi\sigma$ . На отрицательном направлении оси  $y$  с обратной стороны диска поле  $\mathbf{E}$  противоположно и его  $y$ -компонента  $E_y = -2\pi\sigma$ . Эта величина равна полю бесконечно большого заряженного слоя с плотностью  $\sigma$ , полученной в разделе 1.10. Этого следовало ожидать, так как в точках, расположенных близко к центру диска, заряды, находящиеся у края, не вносят больших изменений. Другими словами, любой слой представляется бесконечно большим, если его рассматривать вблизи. Действительно, компонента  $E_y$  равна  $2\pi\sigma$  не только в центре, но всюду на поверхности диска. Чтобы показать это, можно воспользоваться законом Гаусса, как было сделано в разделе 1.10, но следует проявить осторожность, так как вектор электрического поля в любой точке диска не перпендикулярен плоскости последнего. Поместим мысленно любой участок диска площадью  $A$  в тонкий плоский ящик, как показано на рис. 2.10. Обозначим через  $E_{y+}$   $y$ -компоненту поля непосредственно перед этим участком поверхностного заряда и через  $E_{y-}$   $y$ -компоненту поля за этим участком. Поток из ящика наружу равен

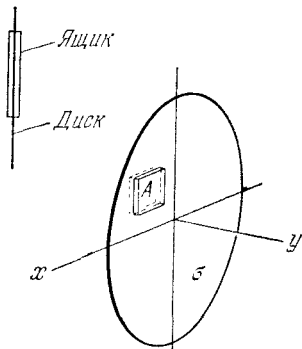


Рис. 2.10. Применение закона Гаусса к заряженному диску.

$\Phi = AE_{y+} - AE_{y-} +$  (поток через боковые грани ящика). (29)

Второй член берется со знаком минус, потому что вектор, представляющий заднюю поверхность ящика, направлен по отрицательной оси  $y$ . Поток через боковые грани ящика можно сделать сколь угодно малым, сплющивая ящик \*). Это не изменит величины заряда в ящике, равную  $\sigma A$ . Тогда в пределе, по закону Гаусса,

$$AE_{y+} - AE_{y-} = 4\pi\sigma A, \quad (30)$$

или

$$E_{y+} - E_{y-} = 4\pi\sigma. \quad (31)$$

Уравнение (31) представляет собой общий результат, справедливый для любого поверхностного распределения заряда, независимо от его равномерности: если  $\sigma$  является локальной плотностью по-

\*) Это правильно, поскольку радиальное электрическое поле не бесконечно. Известно, что это поле конечно почти всюду на диске, так как между центром и краем существует только конечная разность потенциалов. В действительности есть такое место, где радиальное поле бесконечно увеличивается, а именно самый край диска. Мы расположим край нашего ящика на некотором расстоянии от края диска, так как иначе придется иметь дело также с разрывом непрерывности в  $E_{y+}$  и в  $\sigma$ .

верхностного заряда, то в этом месте существует внезапное изменение или разрыв непрерывности компоненты электрического поля, перпендикулярного к слою. Величина изменения равна  $4\pi\sigma$ . В нашей задаче плотность  $\sigma$  постоянна по всему диску, а поскольку поля по обеим сторонам диска должны быть симметричными и других источников поля нет, то  $E_{y+} = -E_{y-}$ , или  $E_{y+} = |E_{y-}| = 2\pi\sigma$  по всему диску.

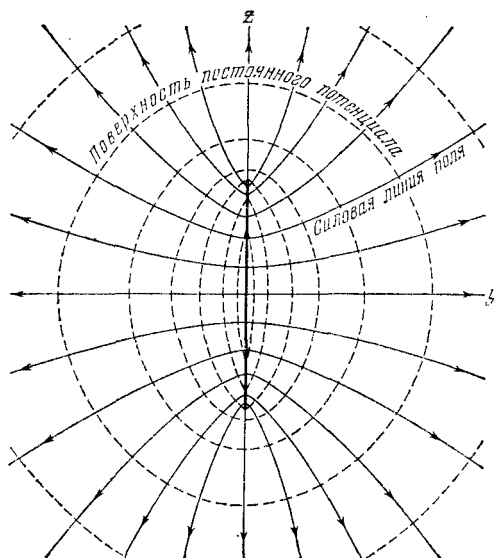


Рис. 2.11. Электрическое поле равномерно заряженного диска. Сплошными кривыми показаны силовые линии поля. Штриховыми кривыми изображены пересечения поверхностей постоянного потенциала с плоскостью рисунка.

На рис. 2.11 показаны несколько силовых линий для этой системы, а также пересечения плоскости  $yz$  с поверхностями постоянного потенциала, изображенные штриховыми кривыми. Вблизи от центра диска поверхности имеют форму линз, а на расстояниях, больших  $a$ , их форма приближается к сферической форме эквипотенциальных поверхностей, существующих вокруг точечного заряда.

Рис. 2.11 является иллюстрацией общего свойства силовых линий и эквипотенциальных поверхностей. Силовая линия, проведенная через любую точку, и эквипотенциальная поверхность в этой точке взаимно перпендикулярны, так же как на контурной карте холмистой местности наиболее крутой склон наблюдается под прямым углом к контуру постоянной высоты. Так и должно быть, потому что если бы поле в любой точке имело компоненту, параллельную эквипотенциальной поверхности, проходящей через эту точку, то для перемещения пробного заряда вдоль поверхности постоянного потенциала требовалось бы определенное количество работы.

Рис. 2.11 является иллюстрацией общего свойства силовых линий и эквипотенциальных поверхностей. Силовая линия, проведенная через любую точку, и эквипотенциальная поверхность в этой точке взаимно перпендикулярны, так же как на контурной карте холмистой местности наиболее крутой склон наблюдается под прямым углом к контуру постоянной высоты. Так и должно быть, потому что если бы поле в любой точке имело компоненту, параллельную эквипотенциальной поверхности, проходящей через эту точку, то для перемещения пробного заряда вдоль поверхности постоянного потенциала требовалось бы определенное количество работы.

## 2.7. Сила, действующая на поверхностный заряд

Простой пример симметричного распределения заряда с плотностью  $\sigma$  по поверхности сферы радиуса  $r_0$  (рис. 2.12, а) может нас кое-чему научить. Полный заряд  $Q$  такой сферы равен  $4\pi r_0^2\sigma$ . Потенциал вне сферы равен  $Q/r$ , как если бы заряд  $Q$  был сосредоточен в центре, а потенциал внутри сферы имеет постоянную величину  $Q/r_0$ . Градиент постоянного потенциала равен, конечно, нулю; мы уже знаем, что поле внутри такой полой сферической заряженной