верхностного заряда, то в этом месте существует внезапное изменение или разрыв непрерывности компоненты электрического поля, перпендикулярного к слою. Величина изменения равна $4\pi\sigma$. В нашей задаче плотность σ постоянна по всему диску, а поскольку поля по обеим сторонам диска должны быть симметричными и других источников поля нет, то $E_{y+} = -E_{y-}$, или $E_{y+} = |E_{y-}| = 2\pi\sigma$ по всему диску.

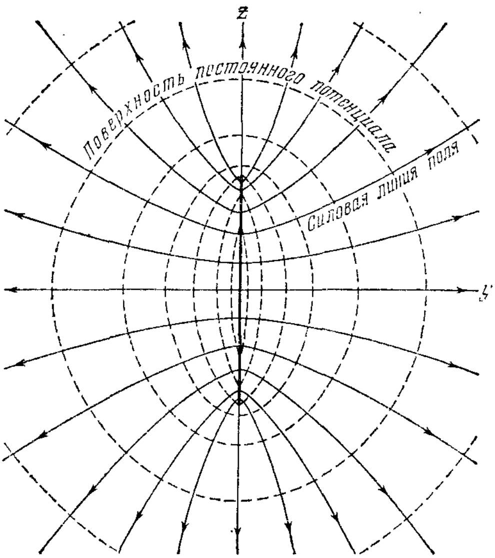

Рис. 2.11. Электрическое поле равномерно заряженного диска. Сплошными кривыми показаны силовые линии поля. Штриховыми кривыми изображены пересечения поверхностей постоянного потенциала с плоскостью рисунка.

На рис. 2.11 показаны несколько силовых линий для этой системы, а также пересечения плоскости yz с поверхностями постоянного потенциала, изображенные штриховыми кривыми. Вблизи от центра диска поверхности имеют форму линз, а на расстояниях, больших a, их форма приближается к сферической форме эквипотенциальных поверхностей, существующих вокруг точечного заряда.

Рис. 2.11 является иллюстрацией общего свойства силовых линий и эквипотенциальных поверхностей. Силовая линия, проведенная через любую точку, и эквипотенциальная поверхность в этой точке взаимно перпендикулярны, так же как на контурной карте холмистой местности наиболее крутой склон наблюдается под прямым углом к контуру постоянной высоты. Так и должно быть, потому что если бы поле в любой точке имело компоненту, параллельную эквипотенциальной поверхности, проходящей через эту точку, то для перемещения пробного заряда вдоль поверхности постоянного потенциала требовалось бы определенное количество работы.

2.7. Сила, действующая на поверхностный заряд

Простой пример симметричного распределения заряда с плотностью σ по поверхности сферы радиуса r_0 (рис. 2.12, a) может нас кое-чему научить. Полный заряд Q такой сферы равен $4\pi r_0^2\sigma$. Потенциал вне сферы равен Q/r, как если бы заряд Q был сосредоточен в центре, а потенциал внутри сферы имеет постоянную величину Q/r_0. Градиент постоянного потенциала равен, конечно, нулю; мы уже знаем, что поле внутри такой полой сферической заряженной оболочки должно исчезать. На рис. 2.12, *б* и *в* приведены графики изменения потенциала φ и поля E с изменением r. Теперь выясним, чему равна сила, действующая на элемент поверхностного заряда σdA, обусловленная отталкиванием, которое он испытывает от всех других элементов заряда на сфере. Нам известны электрические поля сферы $E_{\text{внеш}}=Q/r_0^2=4\pi\sigma$ и $E_{\text{внутр}}=0$. Какую из этих величин мы должны выбрать для вычисления силы, действующей на заряд?

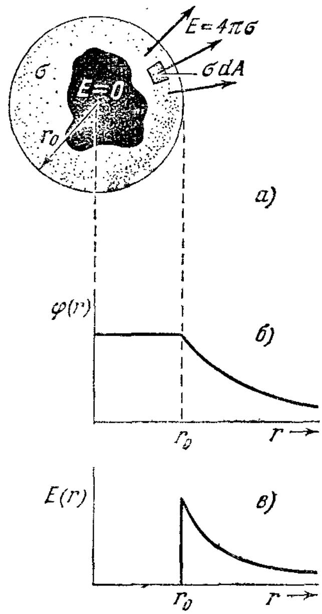

Рис. 2.12. Электрический потенциал и электрическое поле сферической заряженной поверхности. *а*) Вид сферы с вырезом. *б*) φ как функция от r. *в*) E как функция от r.

Верный ответ равен $\frac{1}{2}(E_{\text{внеш}}+E_{\text{внутр}})$. В этом можно убедиться, представив поверхностный заряд не в виде слоя нулевой толщины, а как объемную плотность заряда в слое малой, но конечной толщины Δr, в пределах которой объемная плотность заряда ρ является равномерной, а заряд, содержащийся в любом квадратном сантиметре этого слоя, равен σ. Другими словами, какое бы ни было Δr, берем ρ таким, чтобы $\rho\Delta r=\sigma$. Теперь вы можете воспользоваться законом Гаусса и доказать, что величина электрического поля на внутренней поверхности такого слоя равна нулю и линейно увеличивается по мере прохождения через слой, достигая величины $4\pi\sigma$ на его наружной поверхности. (Кривизна поверхности делает поле не совсем линейной функцией, но поскольку мы всегда считаем, что $\Delta r \ll r_0$, то практически в этой малой области мы имеем плоскую пластину.) Среднее поле в этой пластине и, следовательно, средняя сила, действующая на единицу заряда внутри пластины, равны $\frac{1}{2}(E_{\text{внутр}}+E_{\text{внеш}})$, а в данном частном случае при $E_{\text{внутр}}=0$ равны $\frac{1}{2}E_{\text{внеш}}$ или $2\pi\sigma$. Рис. 2.13, *а* — *в* показывают, как меняется ситуация при уменьшении толщины слоя, если величину заряда на единицу площади сохранять постоянной. Ничего удивительного не происходит: чем меньше расстояние, на котором поле меняется от 0 до $4\pi\sigma$, тем больше объемная плотность заряда ρ.

Заметьте, что даже неравномерная плотность заряда по слою, как, например, на рис. 2.13, *г*, не влияет на величину E по обе стороны слоя. И величина полной силы, действующей на единицу площади такого слоя, по-прежнему равна произведению $\frac{1}{2}(E_{\text{внутр}}+E_{\text{внеш}})$ на полный заряд на единицу площади даже в случае нелинейного изменения поля. В задаче 1.29 приведен простой пример, подтверждающий правильность вышесказанного, а задача 1.30 дает возможность получить доказательство в общем виде.

Реальные поверхностные заряды, конечно, нельзя расположить в слое нулевой толщины с бесконечно большой объемной плотностью, поэтому наше промежуточное представление более реалистично, чем предельный случай. Например, заряд на поверхности металла может быть распределен в слое толщиной в несколько ангстрем. Дело в том, что поскольку слой является тонким по сравнению с другими размерами системы, то при вычислении всех явлений большого масштаба его можно принимать за слой нулевой толщины, характеризуемый только локальной плотностью заряда на единицу площади. С другой стороны, действительное распределение по глубине может иметь значение для атомных явлений, происходящих под поверхностью, например, для перехода электронов из одного вещества в другое через разделяющие их поверхности.

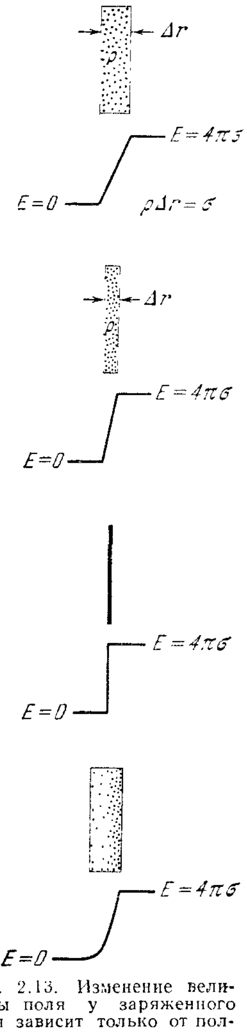

Рис. 2.13. Изменение величины поля у заряженного слоя зависит только от полного заряда на единицу площади.

Возвращаясь к вопросу, с которого мы начали этот раздел, мы видим теперь, что сила, действующая на элемент поверхностного заряда dq, равна $2\pi\sigma dq$, и так как количество заряда в элементе площади dA равно $dq=\sigma dA$, то сила, действующая на этот элемент площади, равна

$$dF = 2\pi\sigma^2\, dA. \tag{32}$$

Таким образом сила, приходящаяся на единицу площади, равна $2\pi\sigma^2$. Эта сила

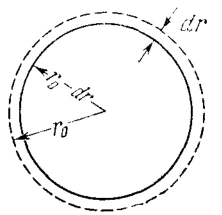

Рис. 2.14. Сжатие сферической оболочки или заряженного баллона.

вызвана отталкиванием зарядов и направлена наружу. Естественно, что если заряды не разлетаются в разные стороны, то эта сила должна быть уравновешена некоторой другой силой атомного или молекулярного происхождения, не входящей в наши уравнения, но удерживающей носители заряда на сфере.

Если мы заряжаем резиновый баллон, то сила электрического отталкивания, которую мы вычислили, а именно $2\pi\sigma^2$ на единицу площади, заставляет баллон расширяться. Наоборот, чтобы уменьшить диаметр такого распределения заряда, сохраняя полный заряд постоянным, над системой следует произвести работу. Предположим, что мы хотим уменьшить радиус сферы от r_0 до r_0-dr (рис. 2.14). Имея в виду работу, которая должна быть произведена только против электрических сил, мы должны приложить к системе силу, равную $2\pi\sigma^2$ *дин* на каждый квадратный сантиметр поверхности и направленную внутрь. Эта сила действует на пути dr и работа, совершенная над системой внешними силами, равна

$$dW=(4\pi r_0^2)(2\pi\sigma^2)\,dr=8\pi^2\sigma^2r_0^2\,dr. \tag{33}$$

Это уравнение можно также выразить через полный заряд Q, так как $\cancel{Q=4\pi r_0^2\sigma}$: $Q=4\pi r_0^2\sigma$

$$dW=\frac{Q^2\,dr}{2r_0^2}. \tag{34}$$

2.8. Энергия, связанная с электрическим полем

Заметьте, что единственным результатом сжатия сферы, если речь идет об электрическом поле, явилось создание напряженности поля, равной $4\pi\sigma$ в пространстве между r_0-dr и r_0, где прежде поле было равно нулю. Во всех других частях пространства поле остается точно таким же, как было. Эта часть поля была создана, можно сказать, за счет работы dW. Сравнивая числа, мы видим, что количество работы dW можно следующим образом выразить через новый объем dv, занятый полем,

$$dW=\frac{E^2}{8\pi}\,dv. \tag{35}$$

Этот пример является частным случаем общей теоремы, которую сейчас мы доказывать не будем: *потенциальная энергия U системы зарядов, которая представляет собой полную работу, требуемую для создания этой системы, может быть вычислена из самого электрического поля, если каждому элементу объема приписать энергию $(E^2/8\pi)\ dv$ и произвести интегрирование по всему пространству, в котором существует это электрическое поле:*

$$\boxed{U=\frac{1}{8\pi}\int\limits_{\substack{\text{по всему}\\ \text{полю}}}E^2\,dv.} \tag{36}$$

E^2 является, конечно, скалярной величиной: $E^2\equiv\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}$.

Работу, требуемую для создания начального состояния нашей заряженной сферы (см. рис. 2.14), можно вычислить следующим образом: $E=Q/r^2$, при $r>r_0$; $E=0$, при $r<r_0$, следовательно,

$$U=\frac{1}{8\pi}\int E^2\,dv=\frac{1}{8\pi}\int\limits_{r_0}^{\infty}\frac{Q^2}{r^4}\,4\pi r^2dr=\frac{Q^2}{2r_0}. \tag{37}$$