цу площади, заставляет баллон расширяться. Наоборот, чтобы уменьшить диаметр такого распределения заряда, сохраняя полный заряд постоянным, над системой следует произвести работу. Предположим, что мы хотим уменьшить радиус сферы от r_0 до r_0-dr (рис. 2.14). Имея в виду работу, которая должна быть произведена только против электрических сил, мы должны приложить к системе силу, равную $2\pi\sigma^2$ *дин* на каждый квадратный сантиметр поверхности и направленную внутрь. Эта сила действует на пути dr и работа, совершенная над системой внешними силами, равна

$$dW = (4\pi r_0^2)(2\pi\sigma^2)\,dr = 8\pi^2\sigma^2 r_0^2\,dr. \tag{33}$$

Это уравнение можно также выразить через полный заряд Q, так как ~~$Q=4\pi r_0^2\sigma$~~: $Q = 4\pi r_0^2 \sigma$

$$dW = \frac{Q^2\,dr}{2r_0^2}. \tag{34}$$

2.8. Энергия, связанная с электрическим полем

Заметьте, что единственным результатом сжатия сферы, если речь идет об электрическом поле, явилось создание напряженности поля, равной $4\pi\sigma$ в пространстве между r_0-dr и r_0, где прежде поле было равно нулю. Во всех других частях пространства поле остается точно таким же, как было. Эта часть поля была создана, можно сказать, за счет работы dW. Сравнивая числа, мы видим, что количество работы dW можно следующим образом выразить через новый объем dv, занятый полем,

$$dW = \frac{E^2}{8\pi}\,dv. \tag{35}$$

Этот пример является частным случаем общей теоремы, которую сейчас мы доказывать не будем: *потенциальная энергия U системы зарядов, которая представляет собой полную работу, требуемую для создания этой системы, может быть вычислена из самого электрического поля, если каждому элементу объема приписать энергию $(E^2/8\pi)\,dv$ и произвести интегрирование по всему пространству, в котором существует это электрическое поле:*

$$\boxed{U = \frac{1}{8\pi}\int\limits_{\substack{\text{по всему}\\ \text{полю}}} E^2\,dv.} \tag{36}$$

E^2 является, конечно, скалярной величиной: $E^2 \equiv \mathbf{E}\cdot\mathbf{E}$.

Работу, требуемую для создания начального состояния нашей заряженной сферы (см. рис. 2.14), можно вычислить следующим образом: $E=Q/r^2$, при $r>r_0$; $E=0$, при $r<r_0$, следовательно,

$$U = \frac{1}{8\pi}\int E^2\,dv = \frac{1}{8\pi}\int\limits_{r_0}^{\infty}\frac{Q^2}{r^4}\,4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{2r_0}. \tag{37}$$

Такой же результат получается при вычислении работы, необходимой для уменьшения радиуса сферы от бесконечно большой величины до конечной величины r_0 (если воспользоваться равенством (34)):

$$U = \int_{\infty}^{r_0} -\frac{Q^2\,dr}{2r^2} = \int_{r_0}^{\infty} \frac{Q^2\,dr}{2r^2} = \frac{Q^2}{2r_0}. \tag{38}$$

Иногда эту энергию называют «запасенной» в поле. Поскольку система является консервативной, это количество энергии, конечно, может быть возвращено, если разрешить зарядам разлететься в стороны, поэтому естественно думать, что эта энергия «где-то находится». Наша точка зрения оказывается правильной, если считать энергию запасенной в пространстве с плотностью, равной $E^2/8\pi$ *эрг/см*^{3}. Особенного вреда в такой точке зрения нет, но на самом деле мы не имеем права, совершенно независимо от чего бы то ни было, «привязывать» запасенную энергию к определенному кубическому сантиметру пространства. Физически можно измерить только полную энергию, т. е. работу, требуемую для перенесения заряда из одной конфигурации в другую. Выражая полную потенциальную энергию электростатической системы уравнением (36) вместо равенства (1.9), мы только пользуемся другим способом подсчета, подобно тому как поведение электрических зарядов может быть выражено как с помощью закона Кулона, так и с помощью понятия об электрическом поле. Иногда изменение точки зрения, даже если оно вначале является только изменением в способе расчета, может стимулировать появление новых идей и более глубокое понимание существа дела. Представление об электрическом поле как о независимой реальности возникло в результате изучения динамического поведения заряженного вещества и электромагнитного излучения.

Мы говорили о потенциальной энергии и об электрическом потенциале. Запомните, что это — совершенно разные вещи. Потенциальная энергия U неподвижной системы зарядов представляет собой работу, необходимую для создания этой системы из отдельных частей, т. е. энергию, которую можно считать запасенной в созданной системе. Это — скалярная величина, являющаяся свойством системы в целом. Электрический потенциал φ данного распределения электрических зарядов является функцией положения в пространстве. Он выражается в *эрг/ед.* СГСЭ$_q$ или в единицах СГСЭ$_V$. Разность значений φ в двух точках пространства равна работе на единицу заряда, требуемой для перенесения заряда из одной точки в другую.

Чтобы подчеркнуть различие между φ и U, запишем уравнение (36) через φ, а не через $\mathbf{E}$. Так как $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, то

$$U = \frac{1}{8\pi} \int\limits_{\substack{\text{по всему}\\ \text{пространству}}} |\nabla\varphi|^2\,dv. \tag{39}$$

Существует и другой способ вычисления запасенной энергии. В гл. 1 было показано, что энергия, необходимая для того, чтобы объединить несколько дискретных точечных зарядов $q_1, \ldots, q_j$, дается равенством (1.9):

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k \neq j} \frac{q_j q_k}{r_{jk}}. \tag{40}$$

Запишем его следующим образом:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1} q_j \left[\sum_{k \neq j} \frac{q_k}{r_{jk}} \right], \tag{41}$$

и рассмотрим выражение в скобках. Каждый член этой суммы является вкладом одного из зарядов в электрический потенциал φ в точке, где находится заряд q_j, таким образом вся сумма, которую мы назовем φ_j, является потенциалом в q_j, обусловленным всеми другими зарядами. Тогда U можно выразить как

$$U = \frac{1}{2} \sum_j q_j \varphi_j. \tag{42}$$

При наличии непрерывного распределения заряда $\rho(x, y, z)$ вместо точечных зарядов мы просто заменяем сумму, входящую в уравнение (42), интегралом:

$$\boxed{U = \frac{1}{2} \int \rho \varphi \, dv.} \tag{43}$$

Здесь уже не имеет значения утверждение, что потенциал φ обусловлен всеми остальными зарядами, так как элемент заряда, аналогичный q_j, равен $\rho \, dv$ и является бесконечно малым. Итак, φ в равенстве (43) представляет собой электрический потенциал всей системы $\varphi(x, y, z)$. Равенство (43), конечно, эквивалентно равенствам (39) и (36).

2.9. Дивергенция векторной функции

Электрическое поле имеет определенную величину и направление в каждой точке. Оно является векторной функцией координат, на что мы неоднократно указывали, записывая функцию в виде $\mathbf{E}(x, y, z)$. То, что мы собираемся сказать, относится к любой векторной функции, а не только к электрическому полю; для обозначения этой функции мы будем пользоваться буквой $\mathbf{F}(x, y, z)$. Другими словами, отдадим на некоторое время предпочтение математике перед физикой и будем называть $\mathbf{F}$ просто векторной функцией в общем виде, имея в виду, конечно, трехмерное пространство.

Рассмотрим конечный объем V некоторой формы, поверхность которого обозначим буквой S. Определение полного потока Φ,