Существует и другой способ вычисления запасенной энергии. В гл. 1 было показано, что энергия, необходимая для того, чтобы объединить несколько дискретных точечных зарядов $q_1, \ldots, q_j$, дается равенством (1.9):

$$U=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k\neq j}\frac{q_j q_k}{r_{jk}}. \tag{40}$$

Запишем его следующим образом:

$$U=\frac{1}{2}\sum_{j=1} q_j\left[\sum_{k\neq j}\frac{q_k}{r_{jk}}\right], \tag{41}$$

и рассмотрим выражение в скобках. Каждый член этой суммы является вкладом одного из зарядов в электрический потенциал φ в точке, где находится заряд q_j, таким образом вся сумма, которую мы назовем φ_j, является потенциалом в q_j, обусловленным всеми другими зарядами. Тогда U можно выразить как

$$U=\frac{1}{2}\sum_{j} q_j\varphi_j. \tag{42}$$

При наличии непрерывного распределения заряда $\rho(x, y, z)$ вместо точечных зарядов мы просто заменяем сумму, входящую в уравнение (42), интегралом:

$$\boxed{U=\frac{1}{2}\int\rho\varphi\, dv.} \tag{43}$$

Здесь уже не имеет значения утверждение, что потенциал φ обусловлен всеми остальными зарядами, так как элемент заряда, аналогичный q_j, равен $\rho\, dv$ и является бесконечно малым. Итак, φ в равенстве (43) представляет собой электрический потенциал всей системы $\varphi(x, y, z)$. Равенство (43), конечно, эквивалентно равенствам (39) и (36).

2.9. Дивергенция векторной функции

Электрическое поле имеет определенную величину и направление в каждой точке. Оно является векторной функцией координат, на что мы неоднократно указывали, записывая функцию в виде $\mathbf{E}(x, y, z)$. То, что мы собираемся сказать, относится к любой векторной функции, а не только к электрическому полю; для обозначения этой функции мы будем пользоваться буквой $\mathbf{F}(x, y, z)$. Другими словами, отдадим на некоторое время предпочтение математике перед физикой и будем называть $\mathbf{F}$ просто векторной функцией в общем виде, имея в виду, конечно, трехмерное пространство.

Рассмотрим конечный объем V некоторой формы, поверхность которого обозначим буквой S. Определение полного потока Φ, выходящего из S, нам уже известно. Это — величина поверхностного интеграла от $\mathbf{F}$, распространенного по всей поверхности S:

$$\Phi = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}, \qquad (44)$$

где $d\mathbf{a}$ является бесконечно малым вектором, величина которого равна площади малого элемента поверхности S, а направление совпадает с наружной нормалью к этому элементу поверхности

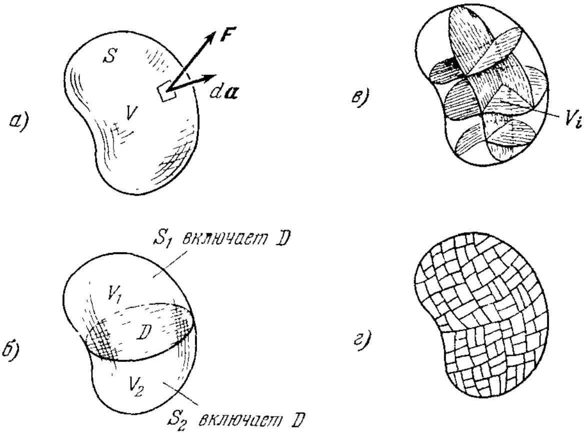

Рис. 2.15. *а*) Объем V, ограниченный поверхностью S, разделен на две части (*б*), ограниченные поверхностями S_1 и S_2. Сумма поверхностных интегралов по всем частям равна первоначальному значению поверхностного интеграла по S, для любой векторной функции $\mathbf{F}$, независимо от того, на сколько частей производится деление (*в* и *г*).

(рис. 2.15, *а*). Разделим объем V на две части поверхностью или диафрагмой D, которая разрезает «баллон» S, как показано на рис. 2.15, *б*.

Обозначим эти части V через V_1 и V_2 и, принимая их за различные объемы, вычислим поверхностные интегралы для каждой в отдельности. Граница поверхности S_1 объема V_1 включает D, так же как и граница S_2 объема V_2. Очевидно, что сумма двух поверхностных интегралов

$$\int_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_1 + \int_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_2 \qquad (45)$$

будет равна первоначальному значению интеграла по всей поверхности, приведенному в уравнении (44). Это объясняется тем, что любой участок на D вносит вклад с одним и тем же знаком в первый интеграл и такой же вклад с противоположным знаком во второй, так как направление «наружу» в одном случае будет направлением «внутрь» в другом. Иными словами, любой поток из V_1 через поверхность D будет потоком в V_2. Остальная поверхность идентична поверхности всего первоначального объема.

Можно продолжать деление до тех пор, пока наши внутренние перегородки не разделят объем V на большое количество частей $V_1, \ldots, V_i, \ldots, V_N$ с поверхностями $S_1, \ldots, S_i, \ldots, S_N$. При любом количестве частей мы можем быть уверенными, что

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_i = \int_{S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \Phi. \tag{46}$$

В пределе, когда N станет очень большим, мы хотим найти нечто характерное для каждой малой области, в конечном пределе для окрестности точки. Но поверхностный интеграл

$$\int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_i \tag{47}$$

по одной из малых областей не является такой величиной, так как если мы продолжим деление, то N станет равным $2N$ и этот интеграл разделится на два, каждый из которых меньше, чем был до деления, так как их сумма постоянна. Другими словами, по мере рассмотрения все меньших и меньших объемов в одной и той же окрестности поверхностный интеграл по одному из таких объемов будет неуклонно становиться меньше. Но при делении объем также делится на две части, сумма которых равна первоначальному объему. Это означает, что нам нужно рассмотреть отношение поверхностного интеграла к объему для элемента объема

$$\frac{\int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_i}{V_i}. \tag{48}$$

Очевидно, что при достаточно большом N, т. е. при делении объема на достаточно мелкие элементы, при каждом делении поверхностного интеграла на две части мы будем делить на две части и объем. Продолжая такое деление, мы приблизим написаннсе отношение к пределу. Этот предел характеризует некоторое свойство векторной функции $\mathbf{F}$ в окрестности точки. Назовем его *дивергенцией* $\mathbf{F}$, обозначаемой символом $\operatorname{div} \mathbf{F}$.

Таким образом, величина дивергенции $\mathbf{F}$ в любой точке равна

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \lim_{V_i \to 0} \frac{1}{V_i} \int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_i, \tag{49}$$

где V_i — объем, в котором находится рассматриваемая точка, а S_i — поверхность этого объема, по которой берется поверхностный интеграл. Необходимо ввести ~~условие, что предел существует и не~~ зависит от способа разделения объема. В настоящем примере мы будем считать ~~это~~ условие выполненным.

Смысл понятия $\operatorname{div} \mathbf{F}$ можно выразить следующим образом: $\operatorname{div} \mathbf{F}$ является потоком наружу из объема V_i, приходящимся на единицу объема~~, в пределе бесконечно~~ малого V_i. Дивергенция является, очевидно, скалярной величиной, и может меняться от точки к точке, причем ее величина в любой определенной точке пространства (x, y, z) является пределом отношения в уравнении (49), так как элементарный объем V_i становится меньше и меньше, все время охватывая точку (x, y, z). Итак, $\operatorname{div} \mathbf{F}$ является просто скалярной функцией координат.

2.10. Теорема Гаусса и дифференциальная форма закона Гаусса

Если значение скалярной функции координат $\operatorname{div} \mathbf{F}$ нам известно, то мы можем снова заняться поверхностным интегралом по большому объему. Запишем вначале равенство (46) следующим образом:

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{N} \int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^{N} V_i \left[\frac{\int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}_i}{V_i} \right]. \tag{50}$$

В пределе, когда $N \to \infty$, $V_i \to 0$, величина в скобках становится дивергенцией функции $\mathbf{F}$ и сумма переходит в объемный интеграл:

$$\boxed{\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, dv.} \tag{51}$$

Уравнение (51) носит название *теоремы Гаусса*, или *теоремы дивергенции*. Оно справедливо для любого векторного поля, для которого существует предел, написанный в формуле (49).

Посмотрим, что это дает для электрического поля $\mathbf{E}$. Нам известен закон Гаусса, имеющий вид

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = 4\pi \int_V \rho \, dv. \tag{52}$$

Если теорема дивергенции справедлива для любого векторного поля, то она, конечно, справедлива и для $\mathbf{E}$:

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E} \, dv. \tag{53}$$

Оба уравнения (52) и (53) справедливы для любого выбранного объема любой формы, размеров и расположения. Сравнивая эти уравнения, мы видим, что условием их справедливости является

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho} \tag{54}$$

в каждой точке.

Если мы отныне примем теорему дивергенции в число математических теорем, которыми мы обычно пользуемся, то уравнение (54) можно рассматривать просто как одну из формулировок закона Гаусса. Это — закон Гаусса в дифференциальной форме, выраженный через локальное соотношение между плотностью заряда и электрическим полем.