мерно в 10^{20} раз. Экспериментаторы восемнадцатого столетия, Грэй и Бенджамин Франклин, объяснили бы это различие так: металлический шар, расположенный на металлической подставке, может терять свою электризацию за миллионную долю секунды, а тот же шар на стеклянной подставке сохранил бы это «нечто» в течение ряда лет. (Для подтверждения последнего факта следовало бы принять некоторые меры предосторожности, которые были невозможны в лаборатории восемнадцатого столетия. Можете ли вы назвать некоторые из них?)

Хороший проводник и хороший изолятор так же сильно различаются по своим электрическим свойствам, как жидкость и твердое тело по механическим свойствам. Это не совсем случайно. И электрическое и механическое поведение тела зависит от подвижности атомных частиц: электрическая проводимость — от подвижности носителей заряда, электронов или ионов, механические свойства — от подвижности атомов или молекул, образующих структуру вещества. Аналогия усилится, если мы вспомним о веществах, занимающих промежуточное положение между твердым телом и жидкостью, например о таких, как вар или лед. Действительно, некоторые вещества — хорошим примером является стекло — при изменении температуры на несколько сотен градусов постепенно и непрерывно меняют свои свойства, переходя из подвижного жидкого состояния в очень устойчивое и жесткое твердое состояние. Электрическая проводимость некоторых веществ также меняется в широком диапазоне от «хороших проводников» до «хороших изоляторов» в зависимости от их температуры. Этим свойством и некоторыми еще более любопытными свойствами обладает особый и широкоиспользуемый класс веществ, называемых полупроводниками.

Одно и то же вещество можно считать твердым или жидким, в зависимости от выбранного масштаба времени и, вероятно, также от масштаба расстояний. Если вы держите в руке кусок обыкновенного асфальта, то он кажется вам достаточно твердым. С точки же зрения геологии он принадлежит к жидкостям, просачивающимся из подземных отложений и даже образующим озера. По аналогичным причинам мы должны считать вещество изолятором или проводником, в зависимости от масштаба времени того явления, которое нас интересует. Мы обнаружим, что для довольно простого и общего класса явлений критерием служит только время, а не расстояние.

3.2. Проводники в электростатическом поле

Сначала рассмотрим электростатические системы, которые содержат проводники. Нас, следовательно, будет интересовать стационарное состояние заряда и электрическое поле, которое установится после всех перераспределений зарядов в проводниках. Все изоляторы мы будем считать совершенными. Как уже упоминалось, обыкновенные изоляторы почти удовлетворяют этой идеализации, поэтому системы, которые мы будем рассматривать, не являются слишком надуманными. Следующий пример может пояснить, какие системы мы имеем в виду. Возьмем два изолированных заряженных металлических шара. Закрепим их на сравнительно небольшом расстоянии друг от друга. Какова величина результирующего электрического поля в пространстве, окружающем шары, и в пространстве между ними, и чему равен заряд, распределенный по каждому шару? Начнем с более общего вопроса: что можно сказать об электрическом поле внутри проводящего вещества, после того как движение зарядов прекратилось?

В стационарном состоянии движение зарядов отсутствует, и вы вынуждены сказать, что в этом случае электрическое поле внутри проводящего вещества должно быть равно нулю. Вы можете утверждать, что если бы это поле не было равно нулю, то подвижные носители зарядов приводились бы в движение некоторой силой и, таким образом, мы не имели бы стационарного состояния. Такие доводы предполагают отсутствие других сил, действующих на носители зарядов, которые могли бы уравновесить электрические силы, чтобы обеспечить стационарное состояние. Чтобы представить себе физическую возможность существования других сил, кроме электрических, которые действуют на носители зарядов, можно вспомнить силу тяжести. Положительный ион имеет вес; он испытывает действие постоянной силы в гравитационном поле, это же относится и к электрону; следовательно, силы, действующие на них, не равны между собой. Этот пример довольно абсурден. Мы знаем, что гравитационные силы пренебрежимо малы в атомном масштабе. Однако существуют другие силы, которые без ошибки могут быть названы «химическими». В гальванических элементах, во многих случаях других химических реакций, в том числе в реакциях, протекающих в живой клетке, носители заряда могут двигаться в сторону, обратную их обычному направлению движения в электрическом поле. Такое явление возможно потому, что в процессе химической реакции выделяется бóльшая энергия, нежели энергия, расходуемая на преодоление поля. Можно сомневаться в том, что эти силы неэлектрического происхождения, так как строение атомов и молекул и силы, действующие между ними, объясняются законом Кулона и квантовой механикой. Однако с точки зрения классической теории электричества их следует считать как бы совершенно посторонними. И действительно, они ведут себя совсем не так, как силы, обратно пропорциональные квадрату расстояния, на которых основана наша теория. Необходимость существования сил, которые являются в этом смысле не электрическими, была уже предсказана в гл. 2, где мы обнаружили, что силы, обратно пропорциональные квадрату расстояния, не могут обеспечить существования устойчивой стационарной системы.

Дело, собственно, заключается в следующем: в некоторых случаях мы должны допустить возможность существования неуравновешенных, не кулоновских сил, действующих на носители зарядов внутри проводящего вещества. В этих случаях электростатическое состояние может быть достигнуто только п р и н а л и ч и и конечного электрического поля в проводнике, которое уничтожит влияние других сил, какие бы они ни были.

Имея это в виду, мы начнем, однако, с более простого и очень важного случая, когда таких сил нет, а именно со случая однородного изотропного проводящего вещества. Можно с уверенностью утверждать, что в таком проводнике, в стационарном состоянии, электрическое поле должно быть равно нулю *). В противном случае заряды должны были бы двигаться. Отсюда следует, что вся область внутри проводника, включая точки, расположенные непосредственно

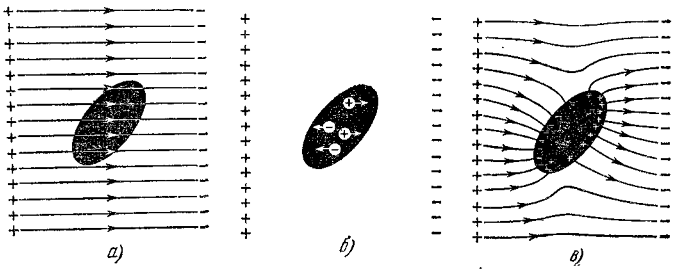

Рис. 3.1. Тело на рис. *а* является нейтральным и непроводящим. Положительные и отрицательные заряды, находящиеся в нем, неподвижны. На рис. *б* заряды свободны и начинают двигаться. Они будут продолжать движение до тех пор, пока не установится конечное состояние, изображенное на рис. *b*.

под его поверхностью, должна иметь одинаковый потенциал. Известно, что при переходе из проводника на его поверхность потенциал испытывает внезапный скачок (см. задачу 3.21). Но в однородном и изотропном проводнике, который мы в данный момент рассматриваем, скачок будет одинаковым всюду на поверхности проводника. Вне проводника электрическое поле не равно нулю. Поверхность проводника должна быть эквипотенциальной поверхностью этого поля.

Вообразите, что мы можем, по желанию, превращать вещество из изолятора в проводник. (Это вполне возможно — стекло становится проводником при нагревании, любой газ можно ионизовать рентгеновскими лучами.) На рис. 3.1, *а* показан незаряженный изолятор в электрическом поле, созданном двумя неподвижными слоями зарядов. Электрическое поле внутри и снаружи тела одинаково.

*) Говоря об электрическом поле внутри вещества, мы имеем в виду поле, усредненное по объему, который велик по сравнению с характерным объемом атомной структуры. Нам, конечно, известно, что во всех веществах, включая и хорошие проводники, мы обнаружим, что в микроскопическом масштабе вблизи атомного ядра существуют очень сильные поля. В конце концов, именно электрическое поле ядра отклоняло альфа-частицы, которыми Резерфорд, Гейгер и Марсден бомбардировали золотую фольгу (см. т. I, гл. 15, Историческое замечание 1). Обычно ядерное электрическое поле не дает вклада в среднее поле в веществе, так как оно имеет одно направление по одну сторону ядра и противоположное — по другую сторону. Вопросы определения и измерения этого среднего поля в настоящее время нами не рассматриваются.

Плотное тело, например стекло, деформировало бы поле; этот эффект мы будем изучать в гл. 9, здесь же он не имеет значения.)

Создадим теперь каким-нибудь образом подвижные заряды (или ионы), которые сделают тело проводником. Положительные ионы увлекутся полем в одном направлении, а отрицательные ионы — в противоположном, как показано на рис. 3.1, *б*. Заряды не могут уйти дальше поверхности проводника. Скопившись около поверхности, они начинают сами создавать внутри тела электрическое поле, которое будет стремиться уничтожить первоначальное поле. Движение зарядов будет продолжаться до тех пор, пока первоначальное поле не окажется полностью уничтоженным. Окончательное распределение зарядов на поверхности, показанное на рис. 3.1, *в*, таково, что поле этих зарядов и поле неподвижных внешних источников в сумме дают нулевое электрическое поле внутри проводника. Поскольку такая компенсация «автоматически» происходит в каждом проводнике, мы должны рассматривать только поверхность проводника, когда имеем дело с внешними полями. Имея это в виду, рассмотрим систему различным образом заряженных проводников, находящихся в пространстве, свободном от других зарядов. На рис. 3.2 показано несколько таких проводников. Можно считать их кусками металла, движению которых препятствуют как бы невидимые изоляторы — подобные шелковым нитям Стефана Грэя. Полный заряд каждого объекта, под которым мы понимаем избыток положительных зарядов над отрицательными, является величиной заданной, так как ни утечка, ни приток зарядов невозможны. Обозначим полный заряд k-го проводника через Q_k. Каждый проводник характеризуется также определенным значением электрического потенциала φ_k. Мы говорим, что проводник *2* находится «под потенциалом φ_2». В подобной системе, где в бесконечности физических объектов нет, обычно удобно приписывать нулевой потенциал точкам, расположенным в бесконечности. В таком случае φ_2 является работой, приходящейся на единицу заряда, необходимой для перенесения бесконечно малого пробного заряда из бесконечности в какую-нибудь точку на проводнике *2*. (Заметьте, между прочим, что эта система принадлежит именно к такому типу систем, в которых пробный заряд должен быть малым; это было объяснено в разделе 1.7.)

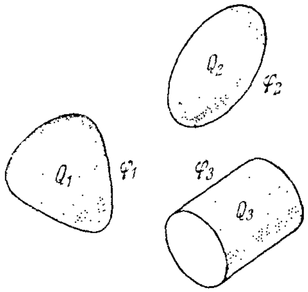

Рис. 3.2. Система из трех проводников. Q_1 — заряд на проводнике *1*, φ_1 — его потенциал и т. д.

Поскольку поверхность проводника на рис. 3.2 непременно является поверхностью постоянного потенциала, то электрическое поле $\mathbf{E}$, равное $-\operatorname{grad}\varphi$, должно быть перпендикулярным к поверхности в каждой ее точке. При переходе из внутренней части проводника наружу у поверхности наблюдается резкое изменение электрического поля; поле **E** не равно нулю на внешней поверхности проводника, но равно нулю внутри. Разрыв непрерывности **E** объясняется присутствием поверхностного заряда с плотностью σ, которую мы можем, с помощью теоремы Гаусса, непосредственно связать с **E**. Возьмем плоский «ящик», охватывающий часть поверхности (рис. 3.3), подобный тому, которым мы пользовались при рассмотрении заряженного диска в разделе 2.6. В данном случае через дно ящика потока нет, так как оно расположено внутри проводника, и мы приходим к выводу, что $E_n = 4\pi\sigma$, где E_n — компонента электрического поля, перпендикулярная к поверхности. Очевидно, что в этом случае другой компоненты нет, так как поле перпендикулярно к поверхности проводника. Поверхностный заряд следует считать полным зарядом Q_k. Следовательно, поверхностный интеграл от σ должен быть равен Q_k по всему проводнику. В заключение можно привести следующие положения, справедливые для любой системы проводников, каковы бы ни были их форма и расположение:

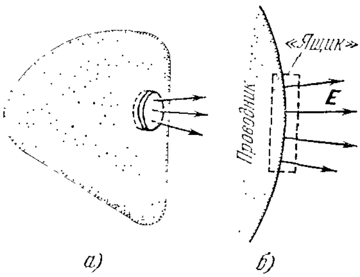

Рис. 3.3. *а*) Закон Гаусса связывает напряженность электрического поля у поверхности проводника с поверхностной плотностью заряда (уравнение (2)). *б*) Поперечное сечение поверхности проводника и «ящика».

$\varphi = \varphi_k$ всюду на поверхности k-го проводника. (1)

В любой точке вне проводника поле **E** перпендикулярно к поверхности и $E = 4\pi\sigma$, где σ — локальная поверхностная плотность заряда. (2)

$$Q_k = \int_{S_k} \sigma\, da = \frac{1}{4\pi} \int_{S_k} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}. \tag{3}$$

Поскольку (2) единственным образом связывает **E** и σ (локальную поверхностную плотность заряда), то можно подумать, что σ является источником **E**. Это было бы ошибкой. **E** представляет собой полное поле, создаваемое всеми зарядами системы, близкими и далекими; поверхностный заряд является лишь частью этих зарядов. Поверхностный заряд на проводнике обязан «приспосабливаться», пока не будет выполнено соотношение (2). Проводник представляет собой особый случай по сравнению с другими распределениями поверхностного заряда — это следует из рис. 3.4.

На рис. 3.5 изображено поле и распределение заряда для простой системы, подобной упомянутой выше. Имеются два проводящих шара: шар с единичным радиусом, несущий полный заряд в $+1$ единицу, и другой шар, несколько больших размеров, полный заряд которого равен нулю. Заметьте, что поверхностная плотность заряда не является однородной ни на одном из проводников. На шаре справа, полный заряд которого равен нулю, поверхностная плотность отрицательного заряда сосредоточена на части поверхности, обращенной к другому шару, а положительный поверхностный заряд расположен на противоположной стороне.

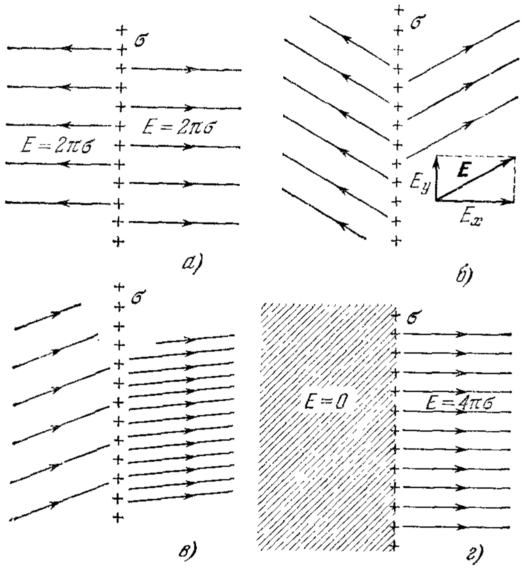

Рис. 3.4. *а*) Система состоит из изолированного слоя поверхностного заряда. Такую систему мы рассматривали на рис. 1.23. Поле равно $2\pi\sigma$ по обе стороны от слоя — это следует из симметрии системы. *б*) Если в системе имеются другие заряды, то мы можем сказать только то, что изменение компоненты E_x у поверхности должно быть равно $4\pi\sigma$, а изменение компоненты y равно нулю. *в*) Большое количество полей, отличных от поля, изображенного на рис. *а*, может обладать этим свойством. Два таких поля показаны на рис. *б* и *в*. *г*) Если среда по одну сторону поверхности является проводником, то с другой стороны поле **E** перпендикулярно к поверхности и величина его равна $4\pi\sigma$.

Штриховые линии на рис. 3.5 изображают эквипотенциальные поверхности или, вернее, их пересечения с плоскостью рисунка. По мере удаления от заряженных шаров эквипотенциальные поверхности становятся все более сферическими, силовые линии поля приближаются к радиальным и само поле начинает походить на поле точечного заряда, равного $+1$, который является полным зарядом всей системы.

Рис. 3.5 иллюстрирует — во всяком случае качественно — все особенности, которые можно было предвидеть, но у нас есть дополнительная причина показать этот рисунок. Даже для такого простого случая нельзя получить точного математического решения прямым путем. Рис. 3.5 был построен на основании приближенного решения. В действительности количество трехмерных геометрических расположений проводников, которые допускают математическое решение в явной форме, мало. Рассмотрение небольшого числа

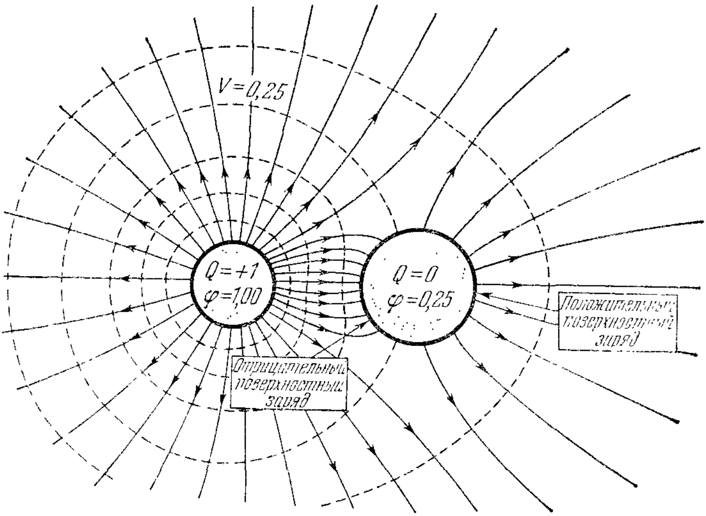

Рис. 3.5. Электрическое поле около двух сферических проводников, из которых один имеет заряд, равный +1, а другой — равный нулю. Штриховые кривые являются пересечениями эквипотенциальных поверхностей с плоскостью рисунка. Нулевой потенциал находится в бесконечности.

таких случаев не увеличит наше понимание физической сущности проблемы. Попытаемся вместо этого понять общий характер математической задачи, которая здесь возникает.

3.3. Основная задача электростатики. Теорема единственности

Эту задачу можно решать, пользуясь потенциалом φ, так как если известно φ, то сразу можно определить **E**. Всюду вне проводников функция φ должна удовлетворять дифференциальному уравнению в частных производных, с которым мы встречались в гл. 2, а именно уравнению Лапласа: $\nabla^2\varphi=0$. Уравнение Лапласа в декартовых координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0. \qquad (4)$$

Задача заключается в определении функции, которая удовлетворяет уравнению (4), а также определенным граничным условиям на проводящих поверхностях. Эти условия могут быть различными. Можно задаться определенной величиной потенциала каждого проводника φ_k. (В реальной системе потенциалы могут быть заданы постоянным соединением проводников с батареями или с другими «источниками энергии» с постоянным потенциалом.) Тогда наше решение $\varphi(x, y, z)$ должно принимать заданное значение во всех точках на каждой из поверхностей. Эти поверхности полностью охватывают