ских расположений проводников, которые допускают математическое решение в явной форме, мало. Рассмотрение небольшого числа

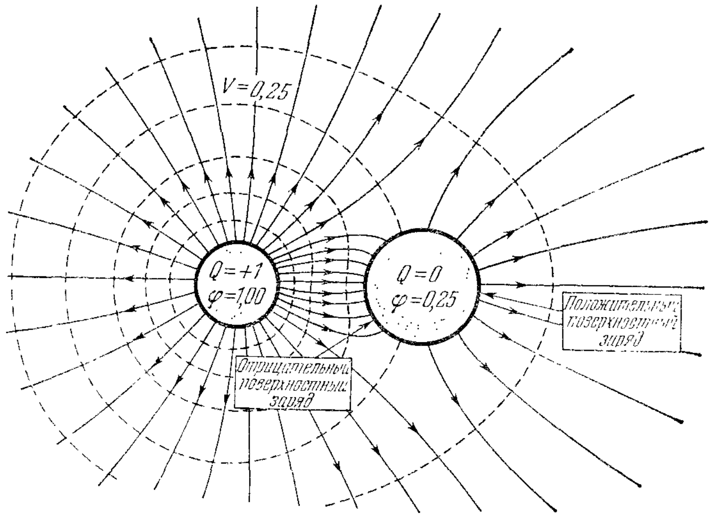

Рис. 3.5. Электрическое поле около двух сферических проводников, из которых один имеет заряд, равный +1, а другой — равный нулю. Штриховые кривые являются пересечениями эквипотенциальных поверхностей с плоскостью рисунка. Нулевой потенциал находится в бесконечности.

таких случаев не увеличит наше понимание физической сущности проблемы. Попытаемся вместо этого понять общий характер математической задачи, которая здесь возникает.

3.3. Основная задача электростатики. Теорема единственности

Эту задачу можно решать, пользуясь потенциалом φ, так как если известно φ, то сразу можно определить **E**. Всюду вне проводников функция φ должна удовлетворять дифференциальному уравнению в частных производных, с которым мы встречались в гл. 2, а именно уравнению Лапласа: $\nabla^2\varphi=0$. Уравнение Лапласа в декартовых координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0. \tag{4}$$

Задача заключается в определении функции, которая удовлетворяет уравнению (4), а также определенным граничным условиям на проводящих поверхностях. Эти условия могут быть различными. Можно задаться определенной величиной потенциала каждого проводника φ_k. (В реальной системе потенциалы могут быть заданы постоянным соединением проводников с батареями или с другими «источниками энергии» с ностоянным потенциалом.) Тогда наше решение $\varphi(x, y, z)$ должно принимать заданное значение во всех точках на каждой из поверхностей. Эти поверхности полностью охватывают область, в которой определена функция φ; при этом мы потребуем, чтобы на поверхности, удаленной «в бесконечность», потенциал φ был равен нулю. Иногда интересующая нас область полностью охватывается проводящей поверхностью; тогда мы можем приписать такому проводнику некоторый потенциал и игнорировать все, что находится вне его. В обоих случаях мы имеем дело с граничной задачей, в которой значение функции определено на всей границе.

Вместо этого можно задаться величиной полного заряда на каждом проводнике Q_k. (Мы не можем произвольно задать величины всех зарядов и потенциалов; это переопределило бы задачу.) При заданных зарядах величина поверхностного интеграла от $\operatorname{grad}\varphi$ по поверхности каждого проводника является определенной. Это придает математической задаче несколько иной аспект. Можно также «смешать» два вида граничных условий.

Основным вопросом, представляющим интерес, является следующий: имеет ли задача вообще решение при любых заданных граничных условиях и если имеет, то одно или несколько?

Мы не будем пытаться изучить все возможные аспекты этого вопроса, но рассмотрим один важный случай; он покажет, как надо подходить к решению таких вопросов, и даст нам полезный результат. Предположим, что определен потенциал каждого проводника φ_k, и требуется, чтобы функция φ стремилась к нулю на бесконечности или на проводнике, охватывающем систему. Мы докажем, что эта задача на граничные условия имеет не больше одного решения. С точки зрения физики кажется очевидным, что она имеет некоторое решение, так как если бы мы действительно расположили проводники указанным образом, соединив их бесконечно малыми проводами с источниками соответствующих потенциалов, то система пришла бы в *некоторое* состояние. Однако математическое доказательство существования решения представляет собой совершенно другую задачу, и мы не будем ее рассматривать. Вместо этого предположим, что имеется некоторое решение $\varphi(x, y, z)$, и покажем, что оно должно быть единственным. Доказательство, типичное для таких случаев, проводится следующим образом.

Предположим, что имеется другая функция $\psi(x, y, z)$, которая также является решением, удовлетворяющим тем же граничным условиям. Известно, что уравнение Лапласа линейно. Следовательно, если φ и ψ удовлетворяют уравнению (4), то и сумма их $(\varphi+\psi)$ или любая линейная комбинация, как, например, $(c_1\varphi+c_2\psi)$, где c_1 и c_2 — величины постоянные, будет удовлетворять этому уравнению. В частности, и разность двух наших решений $\varphi-\psi$ должна удовлетворять уравнению (4). Обозначим эту разность через W:

$$W(x, y, z)=\varphi(x, y, z)-\psi(x, y, z). \tag{5}$$

Очевидно, что W не удовлетворяет граничным условиям. Действительно, у поверхности каждого проводника функция W равна нулю, так как ψ и φ принимают одинаковое значение φ_k у поверхности проводника k. Следовательно, W является решением другой электростатической задачи, с теми же проводниками, но при условии, что все проводники имеют нулевой потенциал. Если это так, то можно утверждать, что функция W должна быть равна нулю во всех точках пространства. Если это неверно, то она должна иметь где-то максимум или минимум,— вспомните, что W равно нулю в бесконечности, так же как на всех поверхностях проводников. Пусть W имеет экстремум в некоторой точке P, рассмотрим тогда шар с центром в этой точке. Из гл. 2 нам известно, что среднее значение по сфере функции, удовлетворяющей уравнению Лапласа, равно значению функции в центре. Это несправедливо, если центр является максимумом или минимумом функции. Таким образом, функция W не может иметь максимума или минимума, и, следовательно, она всюду должна быть равна нулю. Отсюда следует, что $\psi=\varphi$ всюду, т. е. мы доказали, что может существовать только о д н о решение уравнения (4), которое удовлетворяет заданным граничным условиям.

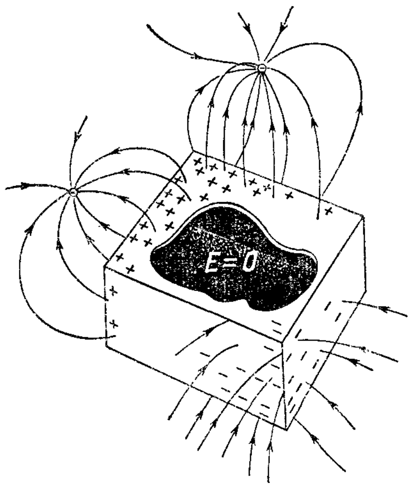

Рис. 3.6. Поле внутри закрытого проводящего ящика всюду равно нулю.

Теперь мы можем легко продемонстрировать другой замечательный факт. *Если в пространстве внутри полого проводника любой формы нет заряда, то электрическое поле в нем равно нулю.* Это справедливо, какое бы поле ни было снаружи проводника. Нам уже известно, что внутри изолированной равномерно заряженной сферической оболочки поле равно нулю, так же как гравитационное поле от полой сферической оболочки внутри нее. Теорема, которую мы только что сформулировали, является в некотором смысле еще более удивительной. Рассмотрим закрытый металлический ящик с небольшим вырезом, изображенный на рис. 3.6. Около ящика имеются заряды, создающие внешнее поле, показанное на рисунке. На поверхности ящика распределение зарядов в высшей степени неравномерно. Всюду в пространстве, включая в н у т р е н н ю ю часть ящика, поле равно сумме поля этого распределения зарядов и полей внешних источников. Трудно поверить, что поверхностные заряды расположились на ящике таким разумным образом, что их поле полностью уничтожило поле внешних источников в каждой точке внутри ящика. Однако это должно было произойти, что можно легко доказать.

Потенциальная функция φ (x, y, z) внутри ящика должна удовлетворять уравнению Лапласа. Вся граница этой области, а именно ящик, является эквипотенциальной поверхностью, так что функция $\varphi=\varphi_0$ должна быть постоянной всюду на границе. Одним из решений является, очевидно $\varphi=\varphi_0$ во всем объеме. Но, согласно теореме единственности, решение может быть только одно, следовательно, это оно и есть. Потенциал $\varphi=\text{const}$ обозначает $\mathbf{E}=0$, так как $\mathbf{E}=-\text{grad}\ \varphi$.

Отсутствие электрического поля внутри проводящего замкнутого пространства имеет большое практическое значение. Оно служит основой для электрической защиты. Для большинства практических целей эта оболочка не обязательно должна быть сплошной. Если в ней имеются небольшие отверстия или если эти отверстия сделаны из металлической сетки, поле будет крайне слабым всюду, кроме точек, расположенных в непосредственной близости от отверстий. Металлическая трубка с открытыми концами, длиной в несколько диаметров, весьма эффективно экранирует пространство внутри себя, за исключением мест, близких к обоим концам. Мы рассматриваем, конечно, только стационарные поля, но эти замечания справедливы также и для медленно изменяющихся электрических полей.

3.4. Некоторые простые системы проводников

В этом разделе мы займемся исследованием нескольких особенно простых конфигураций проводников. Начнем с двух концентрических металлических сфер с радиусами R_1 и R_2, полные заряды которых равны Q_1 и Q_2 соответственно (рис. 3.7). Эта ситуация не представляет собой ничего нового. Благодаря симметрии очевидно, что заряд на каждой сфере должен быть распределен равномерно, следовательно, этот пример возвращает нас к гл. 1! Вне большой сферы поле равно полю точечного заряда величины Q_1+Q_2, так что φ_1, потенциал наружной сферы, равен $(Q_1+Q_2)/R_1$.

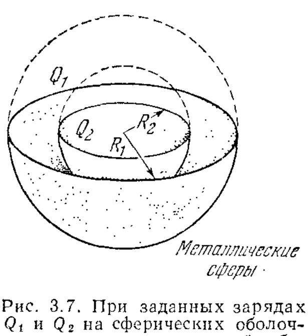

Рис. 3.7. При заданных зарядах Q_1 и Q_2 на сферических оболочках потенциал внутренней оболочки дается уравнением (6).

Потенциал внутренней сферы дается выражением

$$\varphi_2=\frac{Q_1+Q_2}{R_1}+\int_{R_1}^{R_2}-\frac{Q_2}{r^2}dr=$$
$$=\frac{Q_1}{R_1}+\frac{Q_2}{R_1}+\frac{Q_2}{R_2}-\frac{Q_2}{R_1}=\frac{Q_1}{R_1}+\frac{Q_2}{R_2}. \qquad (6)$$

Следовательно, φ_2 является потенциалом во всех точках внутренней сферы. Мы могли бы определить $\varphi_2=(Q_1/R_1)+(Q_2/R_2)$ с помощью принципа суперпозиции: Q_1/R_1 представляет собой потенциал внутри большой сферы, если бы не было малой, а Q_2/R_2 — потенциал внутри малой сферы, если бы не было большой. Если бы на сферах были распределены равные и разноименные заряды $Q_1=-Q_2$, то электрическое поле существовало бы только в пространстве между ними.