

ящик, является эквипотенциальной поверхностью, так что функция $\varphi = \varphi_0$ должна быть постоянной всюду на границе. Одним из решений является, очевидно $\varphi = \varphi_0$ во всем объеме. Но, согласно теореме единственности, решение может быть только одно, следовательно, это оно и есть. Потенциал $\varphi = \text{const}$ обозначает $\mathbf{E} = 0$, так как $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$.

Отсутствие электрического поля внутри проводящего замкнутого пространства имеет большое практическое значение. Оно служит основой для электрической защиты. Для большинства практических целей эта оболочка не обязательно должна быть сплошной. Если в ней имеются небольшие отверстия или если эти отверстия сделаны из металлической сетки, поле будет крайне слабым всюду, кроме точек, расположенных в непосредственной близости от отверстий. Металлическая трубка с открытыми концами, длиной в несколько диаметров, весьма эффективно экранирует пространство внутри себя, за исключением мест, близких к обоим концам. Мы рассматриваем, конечно, только стационарные поля, но эти замечания справедливы также и для медленно изменяющихся электрических полей.

3.4. Некоторые простые системы проводников

В этом разделе мы займемся исследованием нескольких особенно простых конфигураций проводников. Начнем с двух концентрических металлических сфер с радиусами R_1 и R_2 , полные заряды которых равны Q_1 и Q_2 соответственно (рис. 3.7). Эта ситуация не представляет собой ничего нового. Благодаря симметрии очевидно, что заряд на каждой сфере должен быть распределен равномерно, следовательно, этот пример возвращает нас к гл. II! Вне большой сферы поле равно полю точечного заряда величины $Q_1 + Q_2$, так что φ_1 , потенциал наружной сферы, равен $(Q_1 + Q_2)/R_1$.

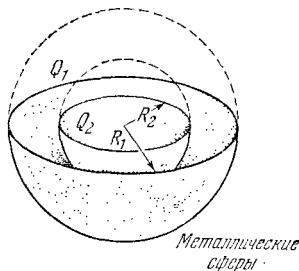


Рис. 3.7. При заданных зарядах Q_1 и Q_2 на сферических оболочках потенциал внутренней оболочки дается уравнением (6).

Потенциал внутренней сферы дается выражением

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{Q_1 + Q_2}{R_1} + \int_{R_1}^{R_2} -\frac{Q_2}{r^2} dr = \\ &= \frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2} - \frac{Q_2}{R_1} = \frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Следовательно, φ_2 является потенциалом во всех точках внутренней сферы. Мы могли бы определить $\varphi_2 = (Q_1/R_1) + (Q_2/R_2)$ с помощью принципа суперпозиции: Q_1/R_1 представляет собой потенциал внутри большой сферы, если бы не было малой, а Q_2/R_2 — потенциал внутри малой сферы, если бы не было большой. Если бы на сферах были распределены равные и разноименные заряды $Q_1 = -Q_2$, то электрическое поле существовало бы только в пространстве между ними.

Одной из самых простых систем, с помощью которой подвижность зарядов в проводнике становится очевидной, является точечный заряд вблизи проводящей плоскости. Предположим, что плоскость xu является поверхностью проводника, простирающейся в бесконечность. Припишем этой плоскости нулевой потенциал. Теперь возьмем положительный заряд Q и расположим его на оси z в h см над плоскостью, как показано на рис. 3.8, *а*. Каков вид поля и какого распределения заряда можно ожидать? Мы ожидаем, что положительный заряд Q будет притягивать отрицательный заряд, но никак не предполагаем, что отрицательный заряд будет скапливаться у основания перпендикуляра, опущенного из Q , причем в бесконечно плотной концентрации. Почему? Мы помним также, что электрическое поле вблизи поверхности проводника всегда перпендикулярно

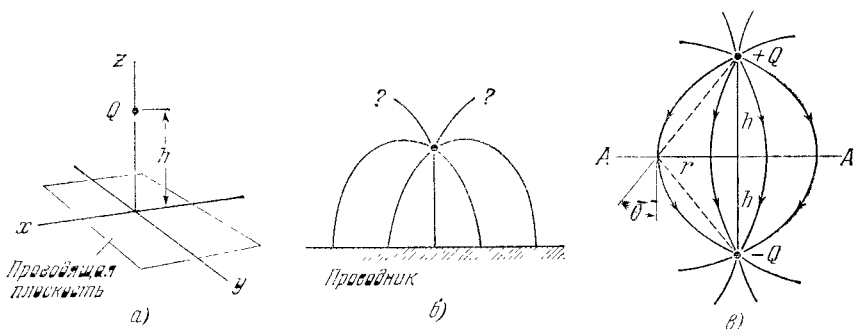


Рис. 3.8. *а*) Точечный заряд Q , расположенный над бесконечно большой плоскостью проводника. *б*) Поле должно иметь примерно такой вид. *в*) Поле пары разноименных зарядов.

к его поверхности. С другой стороны, присутствие проводящей плоскости мало изменит положение в непосредственной близости от точечного заряда Q : силовые линии поля должны выходить из Q , так же как из точечного заряда, в радиальных направлениях. Следовательно, качественная картина будет приблизительно такая же, как на рис. 3.8, *б*. Конечно, эта картина должна быть совершенно симметричной относительно оси z .

Как же, действительно, решить задачу? Ответ может быть получен при помощи некоторого трюка, который является одновременно и поучительным, и часто полезным. Мы будем искать другую задачу, которая решается просто и решение которой или часть его можно использовать. В данном случае такой легкой задачей является задача с двумя равными точечными разноименными зарядами Q и $-Q$. Электрическое поле в плоскости AA (см. рис. 3.8, *в*), которая делит пополам линию, соединяющую два заряда, всюду перпендикулярно к этой плоскости. Если расстояние от плоскости до заряда Q равно расстоянию h в нашей первой задаче, то верхняя половина поля на рис. 3.8, *в* будет отвечать всем нашим требованиям: поле перпендикулярно к плоскости проводника и в окрестности Q приближается к полю от точечного заряда.

Граничные условия в данном случае несколько отличны от граничных условий, поставленных в теореме единственности, рассмотренной в предыдущем разделе. Потенциал проводника является определенной величиной, но в системе имеется точечный заряд, в котором значение потенциала приближается к бесконечности. Точечный заряд можно рассматривать как предельный случай малого сферического проводника с полным зарядом Q . Теорема единственности справедлива также и для «смешанных» граничных условий: потенциалы заданы на одних поверхностях, а полный заряд — на других. И если наше «вспомогательное» решение удовлетворяет этим условиям, то, следовательно, оно должно быть правильным решением.

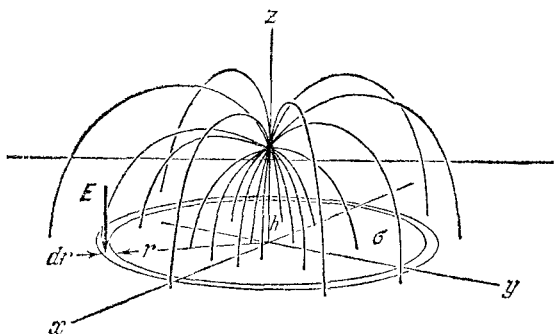


Рис. 3.9. Несколько силовых линий поля, создаваемого зарядом, расположенным над плоскостью. Напряженность поля у поверхности, получаемая из уравнения (7), определяет поверхностную плотность заряда σ .

На рис. 3.9 показано окончательное решение для поля над плоскостью с наведенной плотностью поверхностного заряда. Мы можем вычислить величину и направление поля в любой точке, возвращаясь к задаче с двумя зарядами (рис. 3.8, в) и применяя закон Кулона. Рассмотрим точку на нашей плоскости, расположенную на расстоянии r от начала координат. Квадрат расстояния от этой точки до Q равен $r^2 + h^2$, а z -компонента поля в этой точке равна $-Q \cos\theta / (r^2 + h^2)$. «Мнимый заряд» $-Q$, расположенный под плоскостью, вносит равную z -компоненту. Следовательно, электрическое поле в данном случае дается выражением

$$E_z = \frac{-2Q}{r^2 + h^2} \cos\theta = \frac{-2Q}{r^2 + h^2} \cdot \frac{h}{(r^2 + h^2)^{1/2}} = -\frac{2Qh}{(r^2 + h^2)^{3/2}}. \quad (7)$$

Отсюда можно получить поверхностную плотность заряда σ :

$$\sigma = \frac{E_z}{4\pi} = \frac{-Qh}{2\pi(r^2 + h^2)^{3/2}}. \quad (8)$$

Полный поверхностный заряд должен быть равен $-Q$. Для проверки можно провести интегрирование по поверхности и посмотреть, будет ли результат равен $-Q$.

Действительно,

$$\begin{aligned} \text{полный поверхностный заряд} &= \int_0^{\infty} \sigma \cdot 2\pi r dr = \\ &= -Q \int_0^{\infty} \frac{hr dr}{(h^2 + r^2)^{3/2}} = -Q. \quad (9) \end{aligned}$$

Метод решения, использованный здесь, называют по традиции *методом изображений*. Фиктивный отрицательный заряд, расположенный на расстоянии h под плоскостью проводника, к которому сходятся силовые линии поля, можно считать «зеркальным изображением» точечного заряда Q , подобным действительному изображению за зеркалом. Электрическая сила, действующая на заряд Q , благодаря притяжению поверхностного заряда, равна силе, которую вызвал бы мнимый заряд $-Q$. Обратите внимание на то, что действительным источником этой силы является поверхностный заряд.

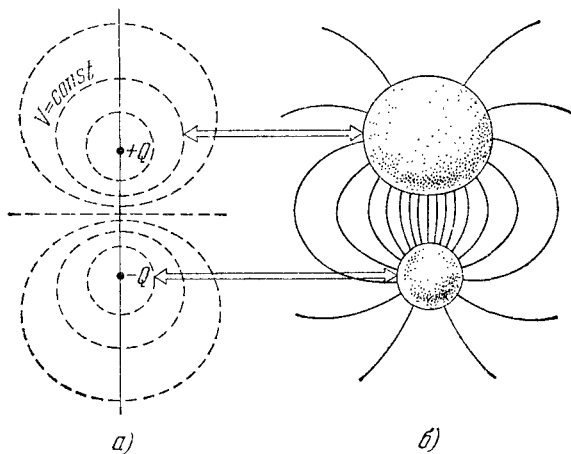


Рис. 3.10. *а)* Поперечные разрезы эквипотенциальных поверхностей двух равных и разноименных точечных зарядов. *б)* Две такие поверхности сделаны из металла. Проводники точно такой же формы, расположенные на таком же расстоянии при заданных зарядах Q и $-Q$, создали бы точно такие же поля во внешних точках.

Аналогия с зеркалом, однако, не очень правильна и малополезна. Вернее рассматривать этот метод в качестве примера более общего метода, который можно назвать «решением по граничным условиям». Чтобы показать, что мы понимаем под этим, рассмотрим некоторые из эквипотенциальных поверхностей в поле двух равных и разноименных зарядов, изображенных на рис. 3.10, *а*. Плоскость будет одной из этих поверхностей. Остальные поверхности являются замкнутыми, причем не точно сферическими, — однако, если понадобится, мы можем установить форму и положение любой из них с помощью элементарных вычислений. Если бы мы могли взять любую из этих поверхностей, изготовить металлические оболочки точно

такой формы и расположить их так, как были расположены эквипотенциальные поверхности относительно друг друга (рис. 3.10, б), то мы получили бы точное решение для электростатического поля двух таких заряженных проводников! Оно было бы соответствующей частью поля двух зарядов. К сожалению, такой метод решения, связанный с необходимостью нахождения точной формы электродов, трудно осуществим. Однако даже приближенное решение, полученное с помощью сферических электродов, иногда может оказаться полезным.

Можно было бы, имея в виду более полезные примеры, продолжить изучение эквипотенциальных поверхностей для других простых систем.

Пожалуй, этот метод следовало бы назвать «поиском новой задачи, дающей интересующее нас решение». Хороший пример полезности такого метода приведен в задаче 3.22. Положение было хорошо описано Максвеллом: «Итак, оказывается, что так называемая обратная задача нахождения формы проводников при заданном выражении для потенциала решается более просто, чем прямая задача определения потенциала при заданной форме проводников» *).

3.5. Конденсаторы и емкость

Две одинаковые плоские проводящие пластины расположены параллельно друг другу на расстоянии s (рис. 3.11, а). Площадь каждой пластины равна A , причем на одной пластине расположен заряд Q , а на другой $-Q$. Значения потенциала каждой из пластин равны φ_1 и φ_2 . На рис. 3.11, б изображено поперечное сечение силовых линий поля этой системы. На некотором расстоянии от краев, между пластинами, поле почти однородно. Если считать его однородным, то его величина равна $(\varphi_1 - \varphi_2)/s$. Соответствующая плотность поверхностного заряда на внутренней поверхности одной из пластин равна

$$\sigma = \frac{E}{4\pi} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{4\pi s}. \quad (10)$$

Если мы пренебрежем искажением поля E и соответствующим изменением σ у краев пластин, то для полного заряда на одной из пластин можно написать следующее выражение:

$$Q = A \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)}{4\pi s} \text{ (пренебрегая краевыми эффектами)}. \quad (11)$$

*) James Clerk Maxwell, Treatise on Electricity and Magnetism, vol. I, chap. VII (3d ed., Oxford University Press, 1891; reprint ed., Dover, New York, 1954). Каждый студент-физик должен иногда заглядывать в эту книгу. Наша тема хорошо изложена в гл. 7. В конце г. I вы найдете несколько прекрасных схем электрических полей и, кроме вышеприведенной цитаты, краткое объяснение причины, по которой Максвелл приводит эти рисунки. Можно думать, что он был восхищен их построением и элегантностью.