3.6. Потенциалы и заряды на нескольких проводниках

Мы коснулись лишь части более общей проблемы, а именно соотношений между зарядами и потенциалами любого количества проводников некоторой заданной конфигурации. Конденсатор с двумя проводниками является только примером. Как это ни удивительно, мы можем сказать кое-что полезное и в общем случае, воспользовавшись *теоремой единственности и принципом суперпозиции*. Для бо́льшей определенности рассмотрим три отдельных проводника, окруженных проводящей оболочкой (рис. 3.15). Потенциал этой оболочки можно принять равным нулю; потенциалы трех проводников для некоторого состояния системы в наших обозначениях равны φ_1, φ_2 и φ_3. Теорема единственности при заданных φ_1, φ_2 и φ_3 обеспечивает определение электрического поля во всей системе. Следовательно, также однозначно определены заряды на отдельных проводниках Q_1, Q_2 и Q_3.

Заряд на внутренней поверхности окружающей заряды оболочки всегда равен $-(Q_1+Q_2+Q_3)$. «Бесконечность» может играть роль этой оболочки, если представить ее беспредельно расширившейся. На рисунке она сохранена, чтобы легче было проследить за процессом переноса заряда, и на тот случай, если нам понадобится что-нибудь присоединить к ней.

Среди возможных состояний этой системы имеются такие, где оба потенциала φ_2 и φ_3 равны нулю. Соединяя проводники *2* и *3* с оболочкой, обладающей нулевым потенциалом, систему можно привести в такое состояние, что показано на рис. 3.15, *а*.

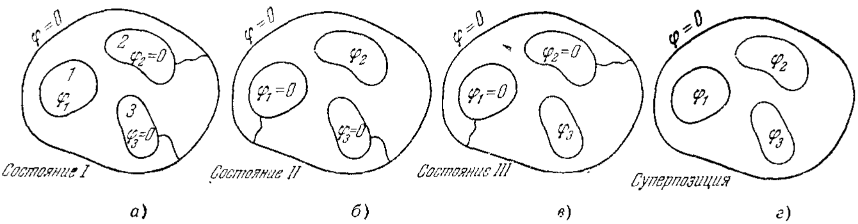

Рис. 3.15. Общее состояние системы можно рассматривать как суперпозицию (*г*) трех состояний (*а*—*в*), в каждом из которых все проводники, кроме одного, поддерживаются при нулевом потенциале.

Как и прежде, мы предполагаем, что соединительные провода настолько тонки, что любым остаточным зарядом на них можно пренебречь. В действительности нас, конечно, не интересует способ приведения системы в определенное состояние.

В состоянии, которое мы назовем состоянием I, электрическое поле во всей системе и заряд на каждом проводнике однозначно определяются величиной потенциала φ_1. Больше того, если потенциал φ_1 удвоить, то это означает удвоение величины поля всюду и, следовательно, удвоение каждого из зарядов Q_1, Q_2 и Q_3. Таким образом, при $\varphi_2=\varphi_3=0$ каждый из трех зарядов должен быть пропорционален φ_1. Сформируем вышесказанное математически:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Состояние I}\\ \varphi_2=\varphi_3=0\end{array}\right\} Q_1=C_{11}\varphi_1; \quad Q_2=C_{21}\varphi_1; \quad Q_3=C_{31}\varphi_1. \tag{15}$$

Три константы C_{11}, C_{21} и C_{31} зависят только от формы и расположения проводящих тел.

Точно таким же образом можно проанализировать условие, в котором φ_1 и φ_3 равны нулю, назвав это условие состоянием II (рис. 3.15, *б*). Здесь снова существует линейное соотношение между единственным ненулевым потенциалом φ_2 (в данном случае) и другими зарядами.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Состояние II}\\ \varphi_1=\varphi_3=0\end{array}\right\} Q_1=C_{12}\varphi_2; \quad Q_2=C_{22}\varphi_2; \quad Q_3=C_{32}\varphi_2. \tag{16}$$

И, наконец, когда φ_1 и φ_2 равны нулю, поле и заряды пропорциональны потенциалу φ_3.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Состояние III}\\ \varphi_1=\varphi_2=0\end{array}\right\} Q_1=C_{13}\varphi_3; \quad Q_2=C_{23}\varphi_3; \quad Q_3=C_{33}\varphi_3. \tag{17}$$

Возможны также состояния, являющиеся суперпозицией трех состояний I, II и III. Электрическое поле в любой точке является векторной суммой электрических полей в трех рассмотренных случаях, в то время как заряд на любом из проводников будет суммой зарядов, которые он несет в каждом из этих случаев.

В этом новом состоянии равенство нулю потенциалов φ_1, φ_2 и φ_3 не является необходимым условием. Короче, это — самое общее состояние. Соотношения, связывающие заряды и потенциалы, получаются простым сложением уравнений (15), (16) и (17):

$$\left.\begin{array}{l}Q_1=C_{11}\varphi_1+C_{12}\varphi_2+C_{13}\varphi_3;\\ Q_2=C_{21}\varphi_1+C_{22}\varphi_2+C_{23}\varphi_3;\\ Q_3=C_{31}\varphi_1+C_{32}\varphi_2+C_{33}\varphi_3.\end{array}\right\} \tag{18}$$

Оказывается, что электрическое поведение нашей системы характеризуется девятью постоянными: C_{11}, C_{12}, ..., C_{33}.

В действительности необходимы только шесть постоянных, так как можно показать, что в любой системе $C_{12}=C_{21}$, $C_{13}=C_{31}$ и $C_{23}=C_{32}$. Почему это так, нам пока еще неизвестно. Доказательство, приведенное в задаче 3.27, основано на законе сохранения энергии, но предварительно мы должны ознакомиться с разделом 3.7. Постоянные C в уравнениях (18) называются *емкостными коэффициентами*. Естественно, что наше доказательство справедливо для любого числа проводников. Физическая величина, определенная выше как *емкость* конденсатора, состоящего из двух пластин, не совпадает с коэффициентами C_{11} (или C_{22}, или C_{33}), но, конечно, связана с ними.

Система уравнений (18) может быть решена относительно потенциалов φ при заданных зарядах Q. Для этого пользуются эквивалентной системой линейных уравнений вида

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= P_{11}Q_1 + P_{12}Q_2 + P_{13}Q_3; \\ \varphi_2 &= P_{21}Q_1 + P_{22}Q_2 + P_{23}Q_3; \\ \varphi_3 &= P_{31}Q_1 + P_{32}Q_2 + P_{33}Q_3. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Величины P называются *потенциальными коэффициентами*; их можно вычислить, зная коэффициенты C, и наоборот.

Такие уравнения можно использовать при решении любой линейной физической системы. Они встречаются при изучении механических конструкций (в соединениях канатов с грузами), при анализе электрических контуров (связывая напряжения и токи) и, вообще говоря, всюду, где можно применить принцип суперпозиции.

3.7. Энергия, запасенная в конденсаторе

Рассмотрим конденсатор емкостью C, с разностью потенциалов φ_{12} между пластинами. Заряд Q равен $C\varphi_{12}$. На одной пластине имеется заряд Q, а на другой $-Q$. Увеличим заряд от Q до $Q+dQ$, перенеся положительный заряд dQ с отрицательно заряженной пластины на положительную, т. е. произведя работу против разности потенциалов φ_{12}. Затраченная работа равна $dW=\varphi_{12}dQ=QdQ/C$. Следовательно, для того чтобы зарядить незаряженный конденсатор некоторым конечным зарядом $Q_{\text{к}}$, требуется затратить работу

$$W = \frac{1}{C}\int\limits_{Q=0}^{Q_k} Q\,dQ = \frac{Q_{\text{к}}^2}{2C}. \tag{20}$$

Это и есть энергия, «запасенная» в конденсаторе. Ее можно также выразить уравнением

$$U = C\varphi_{12}^2/2. \tag{21}$$

Емкость плоского конденсатора с площадью пластин A и зазором s равна $C=A/4\pi s$, а электрическое поле $E=\varphi_{12}/s$. Следовательно, уравнение (21) эквивалентно также выражению

$$U = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{4\pi s}\right)(Es)^2 = \frac{E^2}{8\pi}As = \frac{E^2}{8\pi}\cdot\text{объем}. \tag{22}$$

Это выражение согласуется с общей формулой (2.36) для энергии, запасенной в электрическом поле *).

*) Все вышесказанное относится к «воздушным конденсаторам», выполненным из проводников, между которыми находится воздух. Как вам известно из лабораторных работ, большинство конденсаторов, применяемых в электрических контурах, заполнено изоляторами или «диэлектриками». Мы будем изучать свойства таких конденсаторов в гл. 9.