3.8. Различные методы решения задачи с граничными условиями

Было бы ошибочным создать впечатление, что не существует общих методов решения граничной задачи для уравнения Лапласа. Не имея возможности подробно рассмотреть этот вопрос, мы укажем на три полезные и интересные метода, с которыми вы встретитесь при дальнейшем изучении физики или прикладной математики. Первый метод — это элегантный метод анализа, называемый конформным отображением; он основан на теории функций комплексного переменного. К сожалению, его можно применять только к двумерной системе. Существуют системы, в которых φ зависит только от x и y, например, случай, когда все поверхности проводников расположены параллельно оси z. Тогда уравнение Лапласа принимает вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \tag{23}$$

с граничными условиями, заданными на некоторых линиях или кривых в плоскости xy. В практике встречается много таких систем, или подобных им, поэтому метод, помимо математического интереса, является практически полезным. Например, точное решение для потенциала вблизи двух длинных параллельных полос легко получить методом конформного отображения. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности изображены в поперечном сечении на рис. 3.16. Рисунок дает нам представление о краевом эффекте поля плоских конденсаторов, длина которых велика по сравнению с расстоянием между пластинами. Поле, изображенное на рис. 3.11, *б*, было построено на основании такого решения. Вы сможете пользоваться этим методом после того, как более глубоко изучите функции комплексного переменного.

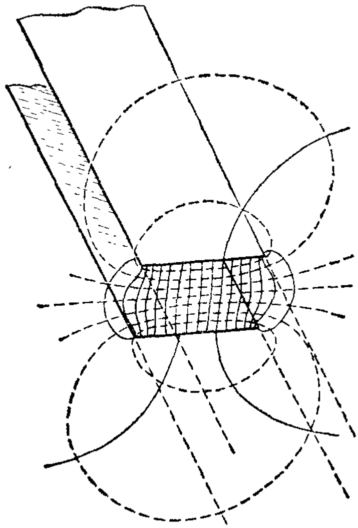


Рис. 3.16. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности для двух бесконечно длинных проводящих полос.

Вторым методом является численное определение приближенных решений задачи об электростатическом потенциале при заданных граничных условиях. Этот очень простой и почти универсальный метод основан на свойстве гармонических функций, с которым вы уже знакомы: значение функции в точке равно ее среднему значению по окрестности этой точки. В этом методе потенциальная функция φ представлена только значениями ряда дискретных точек, включая дискретные точки на границах. Значения функции в точках, не лежащих на границах, подбираются до тех пор, пока каждое из них не будет равно среднему из соседних значений. В принципе это можно сделать, решая одновременно большое количество уравнений, равное числу внутренних точек. Но приближенное решение можно получить гораздо проще, систематически изменяя каждое значение, чтобы приблизить его к среднему из соседних значений, и повторяя этот процесс до тех пор, пока изменения не станут пренебрежимо малыми. Этот метод носит название *метода релаксации*. Единственным препятствием к применению этого метода является трудоемкость процесса вычисления, но теперь это препятствие устранено, так как расчет производится быстродействующими вычислительными машинами, которые идеально подходят для этого метода. Если вам это интересно, обратитесь к задачам 3.29 и 3.30.

Третьим методом приближенного решения краевой задачи является *вариационный метод*. Он основан на принципе, который встречается во многих разделах физики, от ньютоновской динамики до оптики и квантовой механики. В электростатике этот принцип выражается в следующей форме: нам уже известно, что полная энергия электростатического поля дается выражением

$$U=\frac{1}{8\pi}\int E^2\,dv. \tag{24}$$

Если вы решили задачу 2.19, то знаете, что в этом очень простом случае заряд на проводящей поверхности с постоянным потенциалом (состоящей из двух сфер, связанных проводом) распределен таким образом, чтобы энергия, запасенная во всем поле, была минимальной. Это общее правило. В любой системе проводников, при различных фиксированных значениях потенциалов, заряд распределяется по каждому проводнику таким образом, чтобы значение энергии, запасенной в поле, стало минимальным. Это становится почти очевидным, если указать, что любое уменьшение полной энергии поля связано с совершением работы перераспределения заряда *). Плоская поверхность воды в сосуде имеет то же объяснение.

Рассмотрим теперь потенциальную функцию $\varphi(x, y, z)$ в некоторой области, заключающей в себе несколько граничных поверхностей с заданными потенциалами. Точное значение функции $\varphi(x, y, z)$, т. е. решение уравнения $\nabla^2\varphi=0$, удовлетворяющее заданным потенциалам на границах, отличается от всех других функций, удовлетворяющих граничным условиям, но не удовлетворяющих уравнению Лапласа, например от $\psi(x, y, z)$, так как запасенная энергия для φ меньше, чем для ψ. Выразим энергию через φ, как в уравнении (2.38):

$$U=\frac{1}{8\pi}\int|\nabla\varphi|^2\,dv. \tag{25}$$

*) Рассуждая таким образом, мы считаем, что течение заряда сопровождается некоторым рассеянием энергии. Это так обычно и бывает. В противном случае система, не находящаяся вначале в состоянии равновесия, не могла бы придти в это состояние, избавившись от лишней энергии. Как вы думаете, что произошло бы в этом случае?

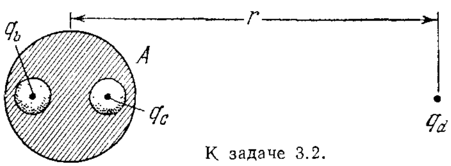
Теперь мы можем поставить граничную задачу по-новому, не упоминая о лапласиане. Потенциальная функция — это та функция, которая *минимизирует интеграл уравнения* (25) *по сравнению со всеми другими функциями, удовлетворяющими тем же граничным условиям*. Следовательно, возможным методом получения приближенного решения данной краевой задачи является испытание большого количества функций, имеющих заданные граничные значения, и последующий выбор той функции, которая обеспечивает минимальное значение U. Можно также взять функцию с одним или двумя переменными параметрами и использовать эти математические «кнопки» для минимизации U. Этот метод особенно удобен для определения самой энергии, часто наиболее важной неизвестной величины. Поскольку энергия U минимальна для точного значения φ, то она мало чувствительна к отклонениям от этого значения. Задача 3.32 иллюстрирует простоту и точность вариационного метода.

Вариационный принцип представляет собой альтернативную формулировку основного закона электростатического поля, и это для нас более существенно, чем польза, которую он приносит при вычислениях. Известно, что формулировка физических законов в виде вариационных принципов часто весьма плодотворна. Профессор Р. П. Фейнман, известный своими блестящими работами в этой области, дал живое и элементарное изложение вариационных идей в книге «Фейнмановские лекции по физике» (см. т. 6, гл. 19).

Задачи

3.1. Наблюдатель с прибором для измерения электрического поля **E** находится на некотором расстоянии от неподвижного точечного заряда q. Незаряженная металлическая трубка небольшой длины опускается на изолированном шнуре и окружает точечный заряд. Как это повлияет на электрическое поле, измеряемое удаленным наблюдателем? Можете ли вы, находясь в лаборатории, внутри большого медного ящика, узнать что-либо о зарядах, движущихся снаружи?

3.2. В сферическом проводнике A имеются две сферические полости. Полный заряд на самом проводнике равен нулю. Однако в центре одной полости расположен точечный заряд q_b, а в центре другой полости — заряд q_c. На большом расстоянии r от проводника находится третий заряд q_d. Определите силу, действующую на каждый из четырех объектов: A, q_b, q_c, q_d? Какие ответы являются только приближенными и справедливыми для сравнительно большого r? (Убедитесь, что вы понимаете все стороны этого вопроса.)



К задаче 3.2.

3.3. Предположите, что после того как было достигнуто состояние, показанное на рис. 3.1, *в*, тело снова сделано непроводящим, так что заряды оказались «замороженными» на своих местах.

После этого положительно и отрицательно заряженные слои, создающие первичное электрическое поле, удаляются. Как будет выглядеть остаточное электрическое поле внутри тела и вне его?

3.4. Гравитационный экран, который будет «экранировать» поле силы тяжести, подобно тому как металлический лист «экранирует» электрическое поле, является мечтой многих неграмотных изобретателей. Подумайте о различии между гравитационными источниками и источниками электричества. Заметьте, что стенки ящика, изображенного на рис. 3.6, не экранируют поля внешних источников, а только позволяют поверхностным зарядам создавать компенсирующее поле. Почему нельзя придумать что-нибудь похожее для поля силы тяжести? Что для этого потребовалось бы?

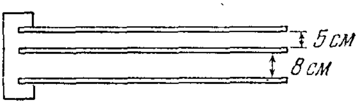
3.5. Проследим за силовой линией, выходящей из точечного заряда (поле точечного заряда над плоскостью, рис. 3.9) в горизонтальном направлении, т. е. параллельно плоскости. Где эта линия пересечет поверхность проводника? (Для решения задачи вам понадобится закон Гаусса и простое интегрирование.)

3.6. *Система, построенная с помощью суперпозиции из точечных и плоских проводников.* Если мы решили задачу для точечного заряда и плоского проводника, то мы можем решить любую задачу, в которой можно применить суперпозицию этих элементов. Предположим, например, что у нас имеется прямой, равномерно заряженный провод с плотностью заряда в 10^3 ед. СГСЭ$_q$ на сантиметр длины, натянутый параллельно земной поверхности на высоте 5 *м*. Чему равна величина поля у поверхности земли непосредственно под проводом? Определите величину электрической силы, действующей на единицу длины провода. Придумайте какие-нибудь другие простые электростатические системы, которые можно построить из наших элементов.

3.7. *Работа, затраченная на удаление заряда от проводника. Замечание: Воспользуйтесь определением электрического потенциала в данной точке через работу, на единицу заряда, необходимую для перемещения пробного заряда в эту точку.*

Заряд Q расположен на высоте h *см* над проводящей плоскостью (см. рис. 3.8, *а*). Двум студентам предложили определить величину работы, которая потребовалась бы для переноса этого заряда в бесконечность. Один студент сказал, что эта работа равна той, что потребовалась бы для разведения на бесконечно большое расстояние двух зарядов Q и $-Q$, которые вначале находились на расстоянии $2h$ *см* друг от друга, следовательно, $W=Q^2/2h$. Второй студент вычислил силу, действующую на заряд при его движении, и интегрировал Fdx, но получил другой ответ. Какой ответ получил второй студент и кто из них решил задачу правильно?

3.8. Три проводящие пластины расположены параллельно друг другу, как показано на рисунке. Наружные пластины соединены проводом. Внутренняя пластина изолирована и несет заряд, равный 10 ед. СГСЭ$_q$/*см*^{2} пластины. Найти плотности поверхностного заряда σ_1 и σ_2 на обеих сторонах средней пластины. Ответ. $\sigma_1=6{,}15$; $\sigma_2=3{,}85$ СГСЭ$_q$/*см*^{2}.



К задаче 3.8.

3.9. *Применение метода «мнимого заряда».* Поместите два заряда величиной $+q$ каждый и два заряда $-q$ по углам квадрата так, чтобы одинаковые заряды располагались по концам диагоналей. Покажите, что в этом случае имеются две эквипотенциальные поверхности, являющиеся плоскостями. Получите и изобразите качественно поле единичного точечного заряда, расположенного на биссектрисе внутреннего угла, образованного при изгибе металлического листа под прямым углом. Какие задачи можно решать таким образом и какие нельзя? Как решается задача с точечным зарядом, расположенным на биссектрисе угла в 120°, образованного пересечением двух проводящих плоскостей?

3.10. Тонкая металлическая пластинка помещена между обкладками плоского конденсатора параллельно обеим пластинкам. Как это повлияет на емкость? Что произойдет, если эту пластинку соединить с одной из обкладок?

3.11. *Два конденсатора, соединенных параллельно.* Конденсатор емкостью в 100 *пф* заряжен до разности потенциалов в 100 *в*. После отключения батареи конденсатор параллельно соединяют с другим. Определите емкость второго конденсатора, если конечное напряжение равно 30 *в*? Какое количество энергии при этом потеряно и что с ней произошло? Ответ. $C_2=233$ *пф*; $\Delta u=3{,}5\cdot 10^{-7}$ *дж*.

3.12. *Сферический конденсатор.* Вычислите емкость C конденсатора, состоящего из двух концентрических сферических оболочек, если радиус внутренней оболочки равен r_1, а внешней r_2? Проверьте результат, сравнив его для $r_2-r_1\ll r_1$ с емкостью плоского параллельного конденсатора.

3.13. *Энергия в поле сферического конденсатора.* Обозначим через φ_{12} разность потенциалов между пластинами сферического конденсатора в предыдущей задаче.

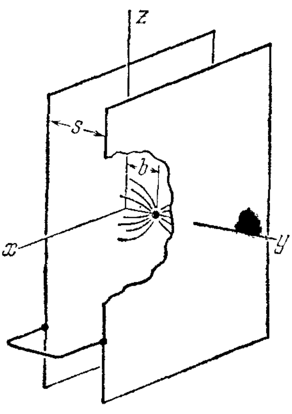
Найдите выражение для электрического поля как функции радиуса. Вычислите полную энергию поля $\int (E^2/8\pi)\, dv$ и покажите, что она равна $^1/_2\, C\varphi_{12}^2$.

3.14. *Емкость изолированной сферы.* Емкостью единичного изолированного проводника называется отношение заряда на проводнике к его потенциалу, если потенциал в бесконечности равен нулю. Покажите, что емкость проводящей сферы (в сантиметрах) в точности равна ее радиусу. Чему равна емкость Земли в микрофарадах? Ответ. $C=710$ *мкф.*

3.15. Сферический конденсатор, подобный описанному в задаче 3.12, движется как спутник по некоторой орбите вокруг Земли. Между внутренней и внешней оболочками механической связи нет. Вакуум можно считать идеальным, а трение на внешней оболочке пренебрежимо малым. Другими словами, ситуация представляет собой идеальное «свободное падение». Предположим, что на внутренней сфере, концентричной по отношению к внешней, имеется некоторый заряд. Является ли это положение устойчивым? (Определите, как изменится энергия системы при смещении внутренней сферы относительно внешней. Чтобы предсказать знак этого изменения, рассмотрите, как изменится емкость, если внутреннюю сферу сместить совсем близко к внешней.)

3.16. *Сила, действующая на пластину конденсатора.* Вычислите силу, действующую на одну из пластин плоского конденсатора. Разность потенциалов между пластинами равна 10 ед. $СГСЭ_V$; пластины представляют собой квадраты со стороной 20 *см*, расстояние между пластинами 3 *см*. Если пластины изолированы, так что заряд не может измениться, то какое количество работы можно получить при сведении пластин? Будет ли эта работа равна энергии, первоначально запасенной в электрическом поле? Ответ. $F=177$ *дин*, $A=531$ *эрг.*

3.17. *Распределение индуцированного заряда. (Вначале решите задачу 3.8, или по крайней мере продумайте ее.)* Две параллельные пластины соединены проводом и, следовательно, имеют одинаковые потенциалы. Совместите одну пластину с плоскостью xz, вторую — с плоскостью $y=s$. Расстояние s между пластинами гораздо меньше размеров пластин. Точечный заряд Q помещен между пластинами в точке $y=b$ (см. рис. к задаче). Определите величину полного заряда на внутренней поверхности каждой пластины. Полный заряд на внутренних поверхностях обеих пластин должен быть конечно равен $-Q$ (почему?), и мы можем предположить, что бóльшая часть этого заряда будет располагаться на ближайшей пластине. Если бы заряд был расположен очень близко к левой пластине ($b\ll s$), то присутствие правой пластины не имело бы большого значения. Мы, однако, хотим знать точно, как распределяется заряд. Если вы попробуете решить эту задачу методом «зеркальных изображений», то убедитесь, что для этого необходим бесконечный ряд мнимых изображений, распространяющийся в обе стороны, подобно ряду изображений, которые можно видеть в парикмахерской с зеркалами на противоположных стенах. Вычисление результирующего поля в любой точке одной из таких поверхностей является нелегкой задачей. Тем не менее на вопрос, который нас интересует, можно ответить, пользуясь очень простым методом вычисления, основанным на принципе суперпозиции. (Указание. Если другой заряд Q поместить где-нибудь на пластине $y=b$, то это удвоит поверхностный заряд на каждой пластине; действительно, полный поверхностный заряд, индуцированный некоторым количеством зарядов на этой пластине, не зависит от положения зарядов на плоскости. Если на этой плоскости находится равномерно заряженный слой, то электрические поля будут простыми и мы сможем решить задачу с помощью закона Гаусса. Сделайте это.)



К задаче 3.17.